ACADÉMIE
DE CRÉTEIL
Liberté
Égalité
Fraternité

MATHÉMATIQUES DES GRANDEURS

Calculs et proportionnalité

Guide pratique
pour les enseignants de Physique-Chimie

Groupe G2M
Mathématiques des Grandeurs et Modélisations
IREM de Paris
Université de Paris

Avec les contributions
de l'Inspection pédagogique régionale
de Physique-Chimie de l'académie de Créteil

ÉDITION 2021

PARIS IREM

Sommaire

Les élèves rencontrent de plus en plus de difficultés en calculs,
mais des leviers existent pour analyser puis changer les choses.

L'intention première de ce *Guide Pratique* est d'inviter à porter un regard nouveau sur les pratiques des mathématiques en cours de Physique-Chimie, en particulier lorsqu'elles font intervenir des grandeurs.

Cette édition 2021 du *Guide Pratique* traite de plusieurs sujets présents dans le quotidien mathématique des enseignants de physique-chimie et des élèves, dont certains étaient absents dans l'édition précédente. L'ensemble des analyses a été réorganisé en deux thématiques :

- **les calculs avec grandeurs** : applications numériques avec conservations des unités, conversions, isolement de terme, comparaisons entre grandeurs et significations des opérations élémentaires ;
- **la proportionnalité avec grandeurs** : place du langage naturel et des langages, propriétés et approches, rôle du modèle dans les graphiques.

Le Guide Pratique propose des éclairages originaux sur les pratiques en classe, tout en veillant à rendre cohérentes les approches des Mathématiques et de la Physique-Chimie.

Ce document est une synthèse du travail mené depuis plus de cinq ans au sein du **groupe G2M – Mathématiques des Grandeurs et Modélisations – de l'IREM de Paris**. Il peut être lu de manière linéaire, mais chaque page se veut autonome.

Ce document est soutenu par **l'Inspection de Physique-Chimie de l'académie de Créteil** qui le diffuse auprès des enseignants de physique-chimie de l'académie. Il est aussi un support de travail pour **l'Inspection premier degré de Nemours** qui l'a mis à disposition des Référents Mathématiques de Circonscription de la Seine et Marne (77) pour leurs actions de formation dans les écoles et les liaisons avec le collège.

Ce document est un objet de liens : entre les Mathématiques et la Physique-Chimie, entre l'enseignement secondaire et primaire, entre l'IREM de Paris et l'académie de Créteil.

Par son caractère interdisciplinaire, par l'importance accordée au langage naturel et aux croisements des représentations, par la place centrale occupée par la question du sens, notamment des opérations élémentaires utilisées dans le contexte des grandeurs, cette édition 2021 du *Guide Pratique* s'inscrit pleinement dans **les mesures du plan Villani-Torossian**.

Le *Guide Pratique* rend compte d'une pensée collective toujours en mouvement.
Les questions soulevées dans ce document importent autant que les réponses proposées.

Des approfondissements en ligne sont proposés en dernière page.

CALCULS et applications numériques

ou le droit et l'importance de conserver les unités dans les calculs

Depuis une cinquantaine d'années s'est imposée en France une tradition selon laquelle il serait inutile, encombrant, voire interdit d'écrire les unités de mesure dans les calculs. Cette pratique peut-elle être remise en question dans l'intérêt des élèves ?

Ce que préconise l'Institution

« Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, *en conservant les unités*. »

Programmes 2016, Cycle 4 (Collège), Mathématiques, Grandeurs et Mesures.

Lors du Séminaire National de Formation *Croisements didactiques : Mathématiques et Physique-Chimie au collège*, du 10 mars 2017 à Paris, les groupes Mathématiques et Physique-Chimie de l'Inspection Générale ont conjointement confirmé qu'il était mathématiquement légitime et pertinent pour la formation des élèves d'écrire les unités de mesure dans les calculs.

Cette pratique est donc possible,
en examen - BAC ou DNB - et en évaluation en classe.
Aussi, un élève ne peut pas être pénalisé de mettre les unités dans les calculs.

La signification du signe égal dans le cadre des grandeurs

Le signe égal signifie « la même chose que » (en première approche), *donc* une grandeur n'est jamais égale à un nombre (par homogénéité).

$v = \frac{d}{t} \neq \frac{240}{2} \neq 120\,\text{km.h}^{-1}$ MAIS $v = \frac{d}{t} = \frac{240\,\text{km}}{2\,\text{h}} = \frac{120\,\text{km}}{1\,\text{h}} = 120\,\text{km/h} = 120\,\text{km.h}^{-1}$

Dans le cas des conversions, la présence des unités assure la validité de l'égalité :

$1\ \text{km} = 1000\ \text{m}$ ALORS QUE $1 \neq 1000$

$1\ \text{h} = 60\ \text{min}$ $\qquad\qquad\qquad\quad$ $1 \neq 60$

Conserver les unités dans les calculs est nécessaire lorsqu'on choisit de travailler avec des grandeurs : l'analyse dimensionnelle comme moyen de contrôle est directement intégrée au calcul et le sens du signe égal est préservé.

CALCULS et conversions

ou l'explicitation de la grandeur de référence

Les conversions avec préfixes sont souvent réduites au « tableau de conversion » ou à la connaissance de l'association « préfixe-puissance de 10 ». Les conversions de durées sont, elles, souvent traitées de manière différente, comme s'il n'y avait aucun lien conceptuel.

L'écriture du « 1 » devant le symbole de l'unité de mesure

Longueur mesurée

$$\boxed{L} = 5\,\boxed{\text{cm}} = 5 \times \boxed{\textbf{1 cm}}$$

Symbole de l'unité de longueur

Unité de longueur (**grandeur de référence** pour la mesure)

Écrire « 1 » devant le *symbole* « cm » permet de rendre explicite la *relation de comparaison* entre la *longueur mesurée,* ici ***L***, et la *longueur de référence,* ici **1 cm**.

Au cœur de la conversion : les relations entre unités de mesure

Considérons l'exemple de la relation mètre-centimètre :

« *centi-* » signifie « *centième de* » : $1 \text{ cm} = \dfrac{1 \text{ m}}{100}$

Ce qui est équivalent à : $1 \text{ m} = 100 \times 1 \text{ cm}$ (voir page ci-contre)

Un exemple : la conversion « kilomètre en centimètre »

$$5\text{km} = 5 \times \boxed{1 \text{ km}} = 5 \times \boxed{1\,000 \times \boxed{1\text{m}}} = 5 \times \boxed{1\,000 \times \boxed{100 \times 1\text{cm}}} = 500\,000\text{cm}$$

Par définition de l'unité de mesure

Par définition du kilomètre

Par définition du centimètre

Par définition de l'unité de mesure

Plusieurs grandeurs, mais une approche unificatrice

Dans le cas de la conversion heure-minute, basée sur le système sexagésimal, l'approche reste la même : $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$

$$5 \text{ h} = 5 \times 1 \text{ h} = 5 \times 60 \text{ min} = 5 \times 60 \times 1 \text{ min} = 300 \times 1 \text{ min} = 300 \text{ min}$$

Le tableau de conversion ne permet pas de construire du sens. L'écriture du « 1 » devant le *symbole* de l'unité de mesure permet l'explicitation de la grandeur de référence de la mesure. L'utilisation des relations entre unités de mesure peut contribuer à donner du sens à la comparaison des grandeurs avec les unités de mesure.

CALCULS, relations entre unités et mesure

ou l'enjeu de la comparaison entre grandeurs

L'usage des opérations réciproques (voire d'astuces) est souvent perçu comme un incontournable pour isoler un terme dans une relation. Lorsque une seule grandeur est en jeu, comme pour une conversion d'unité, on peut procéder avec profit par comparaison entre unités de mesure.

Les relations mètre-centimètre

$$\frac{1\ \text{m}}{100} = 1\ \text{cm} \iff \begin{array}{|c|}\hline 1\ \text{m} \\ \hline 1\ \text{cm} \mid 1\ \text{cm} \mid 1\ \text{cm} \cdots 1\ \text{cm} \mid 1\ \text{cm} \\ \hline\end{array} \iff \frac{1\ \text{m}}{1\ \text{cm}} = 100$$

$$\Updownarrow$$

$$1\ \text{cm} \times 100 = 1\ \text{m}$$

Les relations heure-minute

$$\frac{1\ \text{h}}{60} = 1\ \text{min} \iff \begin{array}{|c|}\hline 1\ \text{h} \\ \hline 1\ \text{min} \mid 1\ \text{min} \mid 1\ \text{min} \cdots 1\ \text{min} \mid 1\ \text{min} \\ \hline\end{array} \iff \frac{1\ \text{h}}{1\ \text{min}} = 60$$

$$\Updownarrow$$

$$1\ \text{min} \times 60 = 1\ \text{h}$$

Les relations entre deux unités d'une même grandeur sont équivalentes entre elles, par construction (pas besoin « d'isoler »).

La mesure en centimètres de la taille d'un crayon

« $L = 3{,}2$ cm »

$$\frac{L}{3{,}2} = 1\ \text{cm} \iff$$

$$\iff \frac{L}{1\ \text{cm}} = 3{,}2$$

1 cm

$$\Updownarrow$$

$$L = 3{,}2 \times 1\ \text{cm}$$

L est la grandeur mesurée
1 cm est l'unité de mesure
3,2 est la mesure de L en centimètres

« 3,2 est la mesure de L en centimètres. »
La mesure d'une grandeur est le nombre issu de la comparaison de la grandeur mesurée avec une grandeur prise comme référence : l'unité de mesure.

Mesurer, c'est comparer une grandeur avec une autre de même nature, choisie comme référence : l'unité de mesure.
Convertir, c'est changer de grandeur de référence. Pour cela, on explicite les relations entres les unités et leurs équivalences.

CALCULS et situations de comparaisons

ou les significations des opérations élémentaires

L'idée de comparaison entre deux grandeurs occupe une place centrale en sciences. Quelles sont les formes que peut prendre une comparaison ? Comment l'exprimer en langage naturel et en opérations élémentaires ?

Forme n°1 de la comparaison : multiplication par un nombre

« Le diamètre du Soleil est **100 fois plus** grand **que** le diamètre de la Terre. »

$$D = \boxed{100\ \times} d$$

Forme n°2 de la comparaison : division par un nombre

« Le diamètre de la Terre est **100 fois moins** grand **que** le diamètre du Soleil. »

$$d = \boxed{\frac{D}{100}}$$

Forme n°3 de la comparaison : division par une grandeur de même nature

« Le diamètre du Soleil **par rapport à** celui de la Terre, c'est 100 fois plus. »

$$\frac{D}{d} = 100$$

Schématisation de la comparaison

Les situations de comparaisons peuvent être ramenées à un schéma :

Ce schéma porte l'équivalence des trois formes, et ce, quel que soit le langage choisi (algébrique ou naturel).

La comparaison de deux grandeurs peut prendre trois formes pouvant se décliner en langage naturel et algébrique. Mobiliser explicitement ces trois formes permet aux élèves de redonner du sens aux opérations élémentaires.

CALCULS et isolement de terme

ou l'enjeu du raisonnement face aux astuces

L'isolement de terme (ou la résolution d'équation en mathématiques) donne lieu à l'utilisation de très nombreuses astuces : produits en croix, triangle magique, passer de l'autre côté, escaliers… Si ces astuces permettent l'obtention rapide d'un résultat, elles ne donnent pas de sens et confinent les élèves dans leurs difficultés. Comment replacer le raisonnement au centre des apprentissages ?

Opérations réciproques et signe égal, pour former au raisonnement

$$d = \boxed{v \times} t \Leftrightarrow \frac{d}{\boxed{v}} = \frac{\cancel{\boxed{v \times}}\, t}{\cancel{\boxed{v}}} \Leftrightarrow \frac{d}{v} = t \Leftrightarrow t = \frac{d}{v}$$

Pour compenser l'opération « multiplier par *v* » on réalise l'opération « diviser par *v* » (deux traits rouges pour la simplification)

Comme le signe égal signifie « la même chose que », l'opération « diviser par *v* » est aussi appliquée de l'autre côté du signe égal.

Comme le signe égal signifie « la même chose que », les deux membres de l'égalité peuvent être intervertis.

Opération réciproque :
Le « contraire » de multiplier par *v*, c'est diviser par *v*.

Signification du signe = :
« la même chose que »
(première approche)

Comportements au sein d'une relation : une procédure de contrôle

L'expression $t = \frac{d}{v}$ obtenue par isolement de terme peut être contrôlée via une analyse du comportement des grandeurs variables.

Par exemple l'expression obtenue prévoit que 1) si *d* est doublée alors, à *v* constant, *t* double aussi ; 2) si *v* est doublée alors, à *d* constant, *t* est divisé par deux. Ces prévisions sont conformes à ce qui est obtenu expérimentalement, donc l'expression est pertinente.

L'approche par opération réciproque est une approche algébrique universelle en mathématiques. L'étude de la relation en lien avec la réalité expérimentale permet de donner du sens pour l'élève.

PROPORTIONNALITÉ et langage naturel

ou la mobilisation explicite des propriétés multiplicative et additive

Trop souvent en classe, la proportionnalité est réduite à l'astuce du produit en croix. Face à une situation de proportionnalité, l'élève, et plus tard le citoyen, devrait pouvoir mener différents types de raisonnements, notamment au moyen du langage naturel. Ces raisonnements s'appuient sur les propriétés multiplicative et additive de la linéarité.

Le langage naturel : un appui majeur pour raisonner

« Une voiture roule à 50 km/h »
« on a 50 km pour 1 h » } La vitesse est traduite en une relation de proportionnalité
« on a 2 × 50 km pour 2 × 1 h » ← propriété multiplicative
« on a 50 km +100 km pour 1 h + 2 h » ← propriété additive

Passage par l'unité de mesure : approche élémentaire et performante

« Une voiture roule à vitesse constante et parcourt 150 km en 3 h. Quelle sera la distance parcourue en 5 h ? »

« on a 150 km pour 3 h »
« on a (150 km)/3 $\boxed{\text{pour 1 h}}$ » ← Passage par l'unité de temps
« on a 5 × (150 km)/3 pour 5 h »

Via la propriété multiplicative, le passage par l'unité de mesure permet de résoudre la plupart des situations de proportionnalité.

Du langage naturel au langage algébrique : éléments de traduction

« *50 km* ***par heure*** » signifie « *50 km* ***pour 1 heure*** »
ce qu'on peut écrire :

$$50\text{ km}\ \mathbf{/h} = 50\text{ km}\ \mathbf{/1\ h} = 50\text{ km}\ \textbf{pour 1 h}$$

ou encore : $\dfrac{50\text{ km}}{\mathbf{1\ h}} = \begin{matrix}50\text{ km}\\ \textbf{pour}\\ \mathbf{1\ h}\end{matrix}$

Le langage naturel et le passage par l'unité de mesure permettent de traiter les situations de proportionnalité.
Mobiliser explicitement les propriétés et varier les représentations enrichissent le concept de proportionnalité.

PROPORTIONNALITÉ, langages et approches

ou l'enjeu de varier les représentations

Situation : une voiture roule à vitesse constante et parcourt **100 km** en **2 h**.
Quelle sera la distance parcourue en **3 h** ?

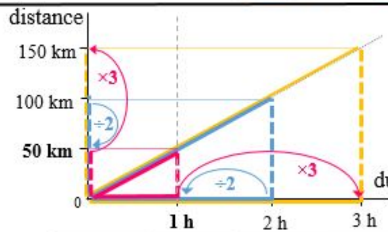
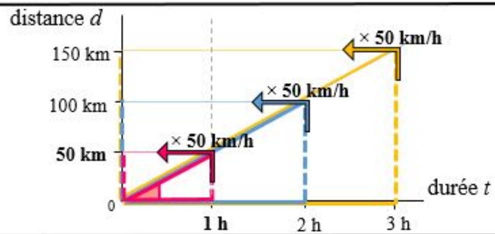
	1^er^ éclairage : la propriété multiplicative	**2^nd^ éclairage : le coefficient de proportionnalité**
	« Deux grandeurs sont proportionnelles si, lorsque l'une est multipliée ou divisée par un nombre, l'autre est aussi multipliée ou divisée par le même nombre. »	*« Deux grandeurs sont proportionnelles si l'une est égale à l'autre multipliée par une troisième grandeur, qui est constante. Cette grandeur est appelée **coefficient de proportionnalité**. »*
En langage naturel	On a : une distance pour une durée — 100 km pour 2 h $\xrightarrow{\div 2}$ donc **50 km pour 1 h** $\xrightarrow{\times 3}$ donc 150 km pour 3 h	Le coefficient de proportionnalité : vitesse $= \dfrac{100\text{ km}}{2\text{ h}} = \boxed{\dfrac{50\text{ km}}{1\text{ h}} = 50\text{ km/h}}$
En langage symbolique	$\dfrac{\text{distance}}{\text{durée}} = \dfrac{100\text{ km}}{2\text{ h}} \underset{\div 2}{=} \dfrac{\mathbf{50\ km}}{\mathbf{1\ h}} \underset{\times 3}{=} \dfrac{150\text{ km}}{3\text{ h}}$	On passe de la durée à la distance par la vitesse : distance = **vitesse** × durée distance = **50 km/h** × 3 h = $\dfrac{\mathbf{50\ km}}{\mathbf{1\ h}} \times 3\text{ h} = 150\text{ km}$
En tableau	voir tableau A (÷2, ×3)	voir tableau B (× 50 km/h)
En graphiques-géométrie	 **Théorème de Thalès**	

Tableau A :

distance	100 km	**50 km**	150 km
durée	2 h	**1 h**	3 h

Tableau B :

distance d	100 km	**50 km**	150 km
durée t	2 h	**1 h**	3 h

$\boxed{\times 50\text{ km/h}}$

PROPORTIONNALITÉ et conversions

ou une nouvelle signification de la division.

La conversion des kilomètres par heure en mètres par seconde est parfois envisagée via « l'astuce du 3,6 » qui ne fait pas sens pour les élèves. Les conversions d'autres grandeurs quotients posent aussi souvent problème.

Grandeur quotient : entre grandeur et relation de proportionnalité

$$72 \text{ km/h} = \overbrace{\begin{matrix}72 \text{ km}\\ \text{pour}\\ 1 \text{ h}\end{matrix} = \frac{72 \text{ km}}{1 \text{ h}} \overset{=}{=} \frac{72\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} \overset{\div 3600}{=} \frac{20 \text{ m}}{1 \text{ s}}}^{\text{Vitesse envisagée comme une relation de proportionnalité}} = 20 \text{ m/s}$$

Conversions d'unités

Propriété multiplicative

Vitesse envisagée comme une grandeur

Polysémie de l'écriture fractionnaire : une 3e signification de la division

La division d'une grandeur par une grandeur de nature différente correspond à une mise en relation de proportionnalité.

Le calcul 10 m / 2 s = 5 m/s peut se traduire en langage naturel par :

« 10 m pour 2 s, d'où 5 m pour 1 s »

On a ici un nouveau sens de la division,
très différent de ceux déjà décrits en page 8 (division d'une grandeur par un nombre et division d'une grandeur par une grandeur de même nature).

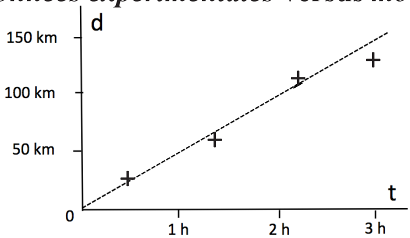
Les conversions de grandeurs quotients prennent sens lorsqu'elles sont envisagées dans le contexte de la proportionnalité. Traduire ce raisonnement en langage algébrique revient à définir une nouvelle signification de la division.

PROPORTIONNALITÉ, graphiques et modèles

ou la nécessité de cohérence interdisciplinaire

En mathématiques, des données rendent comptent d'une situation de proportionnalité si les points du graphique sont *parfaitement* alignés, alors qu'en sciences expérimentales, des points *en tendance* alignés permettent d'envisager une relation de proportionnalité. Comment retrouver de la cohérence dans le discours tenu auprès des élèves ?

Données expérimentales* versus *modèle de relation entre grandeurs



Les points du graphique ne sont pas alignés.
Donc, les *valeurs mesurées* de la distance parcourue et de la durée ne sont pas proportionnelles.

Cependant, envisagés comme expérimentaux (incertitudes de mesure), les points du graphique sont compatibles avec **le choix** d'un **modèle** de dépendance par proportionnalité entre la distance et la durée (ici, la droite).

Situation matérielle et modélisation : à la croisée des deux cultures

Un modèle peut être envisagé comme un ensemble de concepts (ici *la grandeur distance* et *la grandeur temps*) mis en relations (ici par *la proportionnalité*) en vue de donner du sens à une situation matérielle et de faire des prédictions (ici *les données expérimentales réalisées ou à venir*).

En cours de Mathématiques, *souvent*, les enjeux d'enseignement ne portent pas sur les situations matérielles, mais bien sur ***les modèles permettant de les décrire. Ils sont étudiés pour eux-mêmes.***

En Physique-Chimie, les enjeux d'enseignement portent davantage sur ***les choix de modélisation d'une situation matérielle, étudiée pour elle-même***. ***Le modèle choisi*** est au service de l'analyse de la situation.

Le modèle de relation entre grandeurs permet de rendre cohérentes les approches des Mathématiques et de la Physique-Chimie lorsqu'il s'agit d'analyser des données expérimentales.

CONCLUSION et APPROFONDISSEMENTS

Comme la maîtrise de la langue et des langages,
les mathématiques des grandeurs
constituent un objet d'apprentissage partagé
entre disciplines.

Son enseignement est l'affaire de tous.
En prendre soin,
c'est mieux former les élèves.

Découvrir les productions G2M
bit.ly/g2m irem

Suivre les productions G2M
@G2M_IREM

Contacter G2M
g2m@irem.univ-paris-diderot.fr

Former et informer avec G2M
Interventions possibles, toutes modalités envisageables

Académie de Créteil, site Physique-Chimie
bit.ly/g2m creteil

facebook.fr/academie.creteil
@accreteil
www.ac-creteil.fr