

Méthodes variationnelles et symétries

On se propose dans ce problème d'exploiter les méthodes variationnelles dans divers domaines de la physique et d'aborder la notion de symétrie de jauge. La partie I introduit les méthodes variationnelles sur l'exemple de l'optique géométrique et de la mécanique du point et traite en particulier des lois de conservation. La partie II aborde quelques notions d'électromagnétisme sous l'aspect variationnel. La partie III concerne la mécanique quantique non relativiste et examine l'invariance de jauge dans ce domaine. La partie IV présente un modèle élémentaire de transition de phase. La partie V aborde la supraconductivité et la théorie de Ginzburg et Landau.

Les parties I à V ont été conçues pour être abordées dans l'ordre, mais elles sont très largement indépendantes et pourraient être traitées dans un ordre arbitraire. Dans ce cas les résultats de la section I.2.1 (notamment les équations (11) et (13)) devront être admis pour pouvoir aborder plus facilement le reste du problème.

Notations et conventions

Les vecteurs sont notés en caractères gras, comme \mathbf{E} (vous les noterez sur votre copie avec une flèche, \vec{E}). Les composantes sont notées E_i . Le symbole \equiv est une égalité au sens d'une définition, \simeq est employé pour une relation approchée et \propto pour une proportionnalité.

Le gradient d'un champ scalaire ϕ est noté $\nabla\phi$, la divergence et le rotationnel d'un champ de vecteurs \mathbf{A} sont respectivement notés $\nabla \cdot \mathbf{A}$ et $\nabla \times \mathbf{A}$. Les notations $\nabla^2\phi$ et $\nabla^2 \cdot \mathbf{A}$ représentent le laplacien respectivement d'un champ scalaire et d'un champ vectoriel. On rappelle l'identité $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \cdot \mathbf{A}$. La dérivée d'une quantité par rapport à une variable t est parfois notée ∂_t .

Dans tout le problème, les charges sont notées e , celle de l'électron quand elle est explicite est notée $-|e_e|$, avec $|e_e| = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$. Les constantes ϵ_0 et μ_0 sont la permittivité et la perméabilité du vide.

En mécanique quantique les opérateurs sont notés avec un « chapeau », comme $\hat{\mathbf{p}}$ ou \hat{H} .

I. - Introduction aux méthodes variationnelles

Cette partie a pour but d'introduire le calcul variationnel dans les contextes de l'optique géométrique et de la mécanique du point, et de montrer dans ces deux domaines que les lois de conservation sont liées à des propriétés d'invariance. On abordera également la notion de transformation de jauge.

I.1. Principe de Fermat et applications

1. - Dans l'exemple d'introduction qui suit, on montre que le principe de Fermat permet de trouver les équations de conjugaison du dioptré plan. On considère pour cela deux points fixes situés dans des milieux transparents homogènes, A dans un milieu d'indice de réfraction n et A' dans un milieu d'indice n' . Le plan contenant les deux points A et A' et la normale au dioptré est appelé plan xOy et l'origine est choisie de sorte que les coordonnées cartésiennes des deux points fixes prennent les valeurs $A(0, y_0)$ et $A'(x_0, -y_0)$

(figure 1). On cherche à déterminer les coordonnées du point M du dioptre dans le plan xOy par lequel un rayon lumineux issu de A doit passer pour atteindre A' . On paramètre le point M du dioptre par les coordonnées $M(x, 0)$ où x est inconnue.

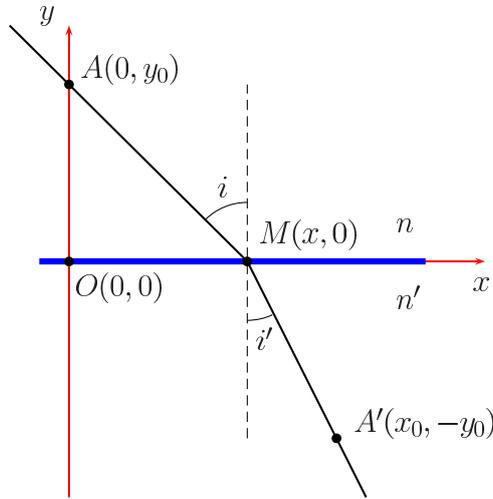


Figure 1. Principe de Fermat et dioptre plan.

- Déterminez l'expression du chemin optique noté $\mathcal{L} = (AMA')$ en fonction des coordonnées des différents points et des indices n et n' .
- Ecrivez la contrainte $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ qui exprime que le chemin réellement suivi par la lumière est celui qui correspond à un chemin optique extrémal.
- Déduisez la loi de la réfraction de Snell-Descartes.
- Interprétez physiquement la condition de stationnarité connue sous le nom de principe de Fermat.
- Montrez que si l'on autorise a priori au point M une coordonnée z hors du plan de la figure, la condition $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$ impose $z = 0$.

2. - On montre maintenant que le principe de Fermat permet également de trouver les équations de conjugaison du dioptre sphérique. On considère pour cela un dioptre sphérique de sommet O , d'axe de révolution (Ox) et de rayon $R = \overline{OC}$ présenté sur le schéma de la figure 2. Le dioptre sépare deux milieux d'indices respectifs n et n' . Soit $M(x, y, z)$ un point du dioptre, on se place dans l'approximation de Gauss, $\frac{y}{R}$ et $\frac{z}{R}$ sont donc tous deux d'ordre $\varepsilon \ll 1$.

Ecrivez l'équation de la surface du dioptre. On admettra qu'à l'ordre le plus bas en ε elle s'écrit :

$$x \simeq \frac{y^2 + z^2}{2R}. \quad (1)$$

Dans la suite, on se place dans le plan $z = 0$.

3. - On considère un point $A(x_A < 0, y_A, 0)$ placé dans le milieu d'indice n , un point $A'(x_{A'} > 0, y_{A'}, 0)$ dans le milieu d'indice n' et le point $M(x > 0, y, 0)$ placé sur le dioptre. On suppose que $|x_A|$ et $x_{A'}$ sont au moins d'ordre R .

- Montrez qu'en négligeant les termes d'ordre strictement supérieur à ε^2 , le chemin

optique $\mathcal{L} = (AMA')$ s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\alpha y^2 - \beta y + \kappa \quad (2)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= v_{A'} - v_A - \frac{n' - n}{R} \\ \beta &= v_{A'} y_{A'} - v_A y_A \\ \kappa &= n' x_{A'} - n x_A + \frac{1}{2} v_{A'} y_{A'}^2 - \frac{1}{2} v_A y_A^2 \end{aligned}$$

où $v_A = \frac{n}{x_A} < 0$ et $v_{A'} = \frac{n'}{x_{A'}} > 0$.

– Montrez que le principe de Fermat permet de trouver la coordonnée y_0 du point d'incidence.

– Tracez l'allure de $\mathcal{L}(y)$ et indiquez y_0 . A quelle(s) condition(s) le chemin optique est-il maximal ou minimal ?

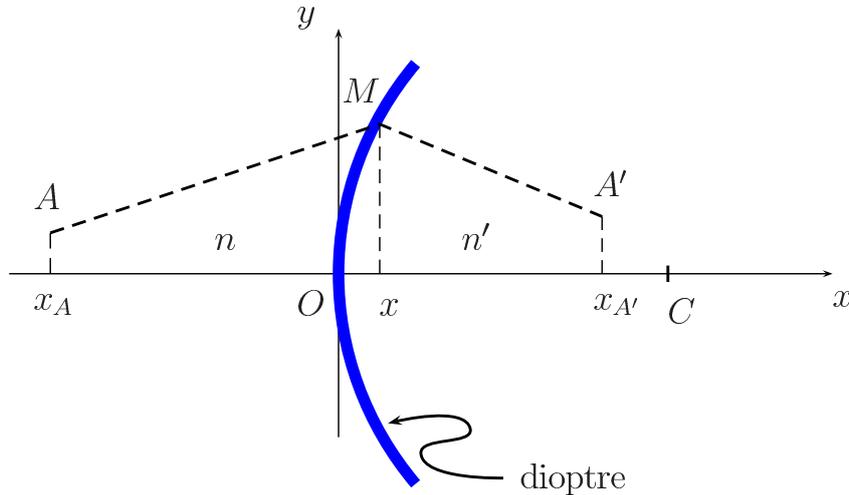


Figure 2. Dioptré sphérique de centre C séparant deux milieux d'indices n et n' .

4. - Montrez que la condition de stigmatisme impose $\alpha = \beta = 0$, puis déduisez la relation de conjugaison du dioptré sphérique.

5. - Quelle autre relation trouve-t-on ?

6. - On considère maintenant un milieu d'indice $n(\mathbf{r})$ quelconque et un rayon lumineux parcourant une courbe \mathcal{C} . Un point du rayon sur \mathcal{C} , repéré par le vecteur \mathbf{r} , est paramétré par l'abscisse curviligne s (figure 3). Le vecteur unitaire tangent dans le sens du rayon est noté $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/ds$. Le chemin optique entre deux points fixés d'abscisses s_1 et s_2 sur \mathcal{C} est ici défini par

$$\mathcal{L}[n] = \int_{s_1}^{s_2} n(\mathbf{r}) ds = \int_{s_1}^{s_2} n(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Pour établir l'équation des rayons lumineux, on utilise le principe de Fermat en effectuant la variation de chemin $\mathbf{r}(s) \rightarrow \mathbf{r}(s) + \delta\mathbf{r}(s)$ (en pointillés sur la figure), soit $\delta(n(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r})$

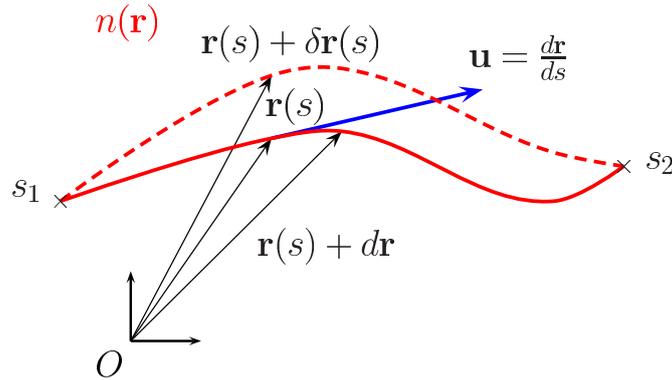


Figure 3. Conventions de notation pour la propagation d'un rayon lumineux arbitraire.

sous l'intégrale :

$$\delta \mathcal{L} \equiv \int_{s_1}^{s_2} [(\delta n(\mathbf{r})) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} + n(\mathbf{r}) \delta \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} + n(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot \delta(d\mathbf{r})] = 0, \quad \text{avec} \quad \delta n(\mathbf{r}) = \nabla n \cdot \delta \mathbf{r}. \quad (4)$$

En notant que le deuxième terme sous l'intégrale est nul et à l'aide d'une intégration par parties du troisième terme, $\int_{s_1}^{s_2} n(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot \delta(d\mathbf{r}) = [n(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{r}]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} (n(\mathbf{r}) \mathbf{u}) ds \cdot \delta \mathbf{r}$, déduisez de ce postulat l'équation

$$\frac{d}{ds} \left(n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n(\mathbf{r}). \quad (5)$$

7. - On peut introduire une coordonnée auxiliaire a telle que $ds = n(\mathbf{r}) da$.

- Donnez la forme prise par l'équation des rayons lumineux (5) en fonction de cette coordonnée.

- Quelles analogies peut-on faire entre ce problème et un problème de mécanique du point ?

- Exprimez notamment les quantités optiques qui jouent le rôle de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie potentielle en fonction de \mathbf{r} , $n(\mathbf{r})$ et \mathbf{u} .

8. - Dans la suite, on considère la propagation dans une fibre optique à gradient d'indice assimilée à un milieu de symétrie cylindrique en coordonnées (r, φ, z) où l'indice optique n'est fonction que de r .

- Établissez les équations de conservation

$$n(r) \frac{dz}{ds} = \text{const.} = \lambda \quad (6)$$

$$n(r) r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{const.} = \mu \quad (7)$$

en vous aidant de l'analogie mécanique.

- Quelle loi de l'optique géométrique se « cache » derrière la première des deux lois de conservation ?

9. - On suppose que le rayon lumineux reste dans le plan $\varphi = 0$.

– En notant $ds^2 = dr^2 + dz^2$, montrez que

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n^2 - \lambda^2}{\lambda^2}. \quad (8)$$

– Dans le cas où l'indice dépend de r suivant la loi :

$$n^2 = n_1^2 \left(1 - 8\Delta \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (9)$$

où Δ est choisi de sorte que $n(0) = n_1$ et $n\left(\pm \frac{a}{2}\right) = n_2$, montrez que le rayon est guidé par la fibre si $n_2 \leq \lambda \leq n_1$.

– Montrez que l'équation de la trajectoire est :

$$r = r_0 \cos(\Omega z), \quad (10)$$

où $\Omega = \frac{n_1 \sqrt{8\Delta}}{a\lambda}$.

– Déterminez la valeur de l'amplitude r_0 .

10. - Pierre de Fermat a également laissé son nom en mathématiques. Discutez-en brièvement les raisons et le statut actuel du résultat important qui porte son nom.

I.2. Méthodes variationnelles en mécanique

Dans les parties I.2.1 et I.2.2, on se limite à des systèmes à un degré de liberté.

I.2.1. Équations d'Euler-Lagrange

On considère un système dynamique à un degré de liberté $q(t)$ (on note $\dot{q}(t) \equiv \frac{dq}{dt}$ la vitesse généralisée associée) et on postule l'existence d'une fonction $L(q, \dot{q}, t)$ appelée lagrangien qui permet de définir l'action entre deux instants définis, t_1 et t_2 , par l'expression :

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (11)$$

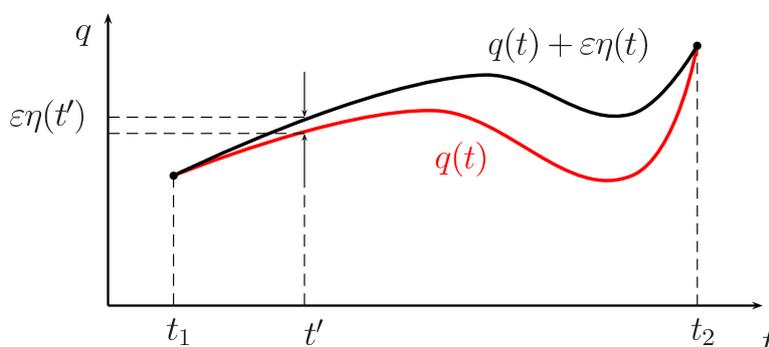


Figure 4. Minimisation de l'action.

où q et \dot{q} sont des fonctions de t . Le principe d'Hamilton (ou *principe de moindre action*) stipule que les équations du mouvement (appelées équations d'Euler-Lagrange) sont obtenues en rendant l'action extrémale entre t_1 et t_2 , c'est-à-dire en imposant la condition

$$\delta S \equiv S[q + \varepsilon \eta] - S[q] = O(\varepsilon^2) \quad (12)$$

où $\eta = \eta(t)$ est une fonction qui s'annule aux bornes de l'intégrale, $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ (cf figure 4) et ε est un réel arbitrairement petit.

11. - Développez $L(q + \varepsilon \eta, \dot{q} + \varepsilon \dot{\eta}, t)$ au premier ordre en ε , puis, à l'aide de la condition (12), établissez l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (13)$$

12. - Les trois questions suivantes traitent d'un exemple d'utilisation des équations d'Euler-Lagrange. On tend une bulle de savon entre deux anneaux co-axiaux de même rayon R , d'axe (Oz) , comme schématisé sur la figure 5. L'anneau supérieur est placé dans le plan $z = h$, l'anneau inférieur dans le plan $z = -h$. On adopte les coordonnées cylindriques (r, φ, z) . La position d'équilibre de la surface de la bulle correspond à l'aire minimale. Justifiez ce résultat et montrez que cela revient à minimiser la grandeur A qui joue un rôle analogue à celui de l'action en mécanique :

$$A = \int_{-h}^h 2\pi r \sqrt{1 + \dot{r}^2} dz \quad (14)$$

avec les conditions aux limites $r(-h) = r(h) = R$ et ici $\dot{r} = \frac{dr}{dz}$.

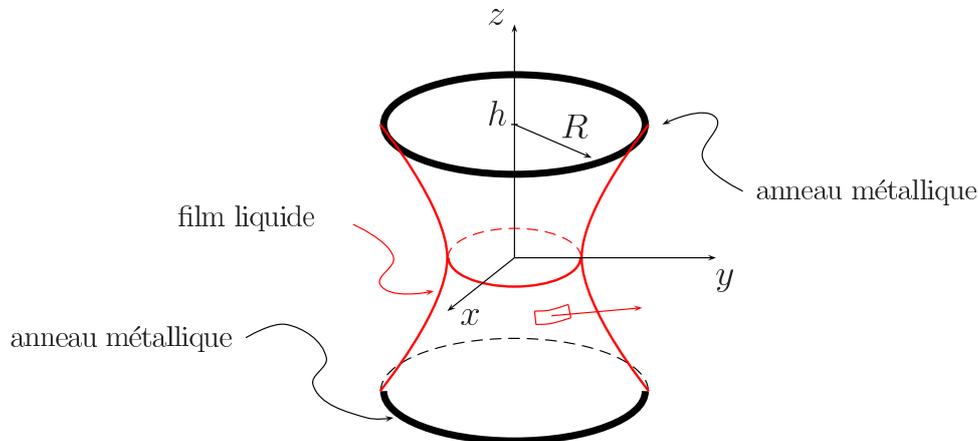


Figure 5. Bulle de savon tendue entre deux anneaux métalliques identiques.

13. - Montrez que l'équation d'Euler-Lagrange donne alors :

$$1 + \dot{r}^2 = r \ddot{r}. \quad (15)$$

14. - Vérifiez que la solution de cette équation est $r = a \operatorname{ch}\left(\frac{z}{a}\right)$ avec $R = a \operatorname{ch}\left(\frac{h}{a}\right)$. La surface porte le nom de caténoïde. En utilisant la loi de Laplace, que peut-on dire de remarquable sur la courbure de la surface ?

15. - On revient maintenant à l'étude générale. A la place du formalisme lagrangien et de l'équation du mouvement (13), on préfère parfois avoir recours au formalisme hamiltonien. On définit alors

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (16)$$

et on construit à partir du lagrangien $L(q, \dot{q}, t)$ une nouvelle fonction, l'hamiltonien $H(p, q, t)$, ne dépendant plus de \dot{q} :

$$H(p, q, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t). \quad (17)$$

A partir de cette définition et de l'équation (13), formez les dérivées $\frac{\partial H}{\partial q}$ et $\frac{\partial H}{\partial p}$ appelées équations d'Hamilton, équivalentes à l'équation d'Euler-Lagrange.

16. - Dans le cas habituel conservatif où le lagrangien est donné par la différence entre l'énergie cinétique K et l'énergie potentielle V , $L = K - V$, l'action prend la forme

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt [K(\dot{q}) - V(q)]. \quad (18)$$

Montrez que l'équation de Lagrange est équivalente à la relation fondamentale de la dynamique et donnez le sens de l'hamiltonien.

I.2.2. Exemples de lois de conservation

17. - Supposons que le lagrangien soit indépendant de $q(t)$. Montrez qu'il en découle une loi de conservation et donnez un exemple physique pour illustrer cette situation.

18. - Supposons maintenant que le lagrangien ne soit pas explicitement fonction de t . Montrez qu'il en résulte une équation de conservation de l'énergie.

19. - Donnez la forme du lagrangien équivalent et identifiez les lois de conservation établies dans le cas de la fibre optique à gradient d'indice (section I.1) à la lumière des résultats de ce paragraphe I.2.2.

I.2.3. Couplage d'une charge à un champ électromagnétique

Un cas particulier important est celui d'une charge électrique e sous champ électromagnétique dérivant des potentiels ϕ et \mathbf{A} . Le lagrangien associé à la particule prend la forme

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e(\phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}). \quad (19)$$

Les coordonnées q_i sont les composantes de la position de la particule, \mathbf{r} , et les vitesses généralisées $\dot{q}_i = v_i$ sont celles de la vitesse, \mathbf{v} . Les formules (13) et (16) se généralisent à chaque degré de liberté i et l'hamiltonien (17) comprend une somme sur tous les degrés de liberté,

$$H = \sum_i p_i v_i - L. \quad (20)$$

20. - Calculez la composante p_i de l'impulsion, puis établissez la forme de l'hamiltonien $H(\mathbf{p}, \mathbf{r})$.

21. - Montrez que le problème de la particule sous champ se déduit de celui de la particule libre moyennant la substitution

$$H \rightarrow H - e\phi, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}. \quad (21)$$

22. - On peut effectuer un *changement de jauge* sur ce lagrangien en ajoutant la dérivée totale d'une fonction différentiable quelconque notée $e\alpha(\mathbf{r}, t)$ (le choix de mettre la charge e en facteur permet de simplifier les expressions dans la suite) :

$$L' = L + e \frac{d\alpha}{dt}, \quad (22)$$

où

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha. \quad (23)$$

Montrez que le principe de moindre action appliqué avec les lagrangiens L et L' conduit aux mêmes équations du mouvement (L et L' décrivent donc la même physique).

23. - Justifiez que L' est associé à des potentiels ϕ' et \mathbf{A}' liés aux potentiels de départ ϕ et \mathbf{A} par les relations

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \alpha, \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \partial_t \alpha, \quad (24)$$

puis vérifiez de nouveau que la physique décrite par L' est bien la même que celle associée à L en montrant que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont inchangés dans la transformation de jauge.

II. - Électromagnétisme et méthodes variationnelles

Le but de cette partie est de montrer, d'abord de manière empirique puis plus rigoureusement, que la théorie de l'électromagnétisme peut aussi être déduite d'un principe variationnel. Une loi de conservation importante sera déduite d'une propriété d'invariance appelée *invariance de jauge*.

II.1. Capacité d'un condensateur cylindrique

On considère un condensateur cylindrique parfait (d'armatures de longueur infinie). L'armature interne infiniment mince, de rayon $r = a$, est portée au potentiel $\phi_0 > 0$. L'armature externe, concentrique à la première et de rayon $r = 2a$, est maintenue à un potentiel nul (figure 6). Dans toute cette section II.1, r désigne la coordonnée radiale du système de coordonnées cylindriques.

II.1.1. Estimation de l'énergie électrostatique par une méthode variationnelle

On fait l'hypothèse que le potentiel électrostatique entre les armatures est une fonction de la forme

$$\phi_{(n)}(r) = A_1 r^n + A_2, \quad (25)$$

paramétrée par $n \neq 0$, où A_1 et A_2 sont des constantes (également paramétrées par n) fixées par les conditions aux limites.

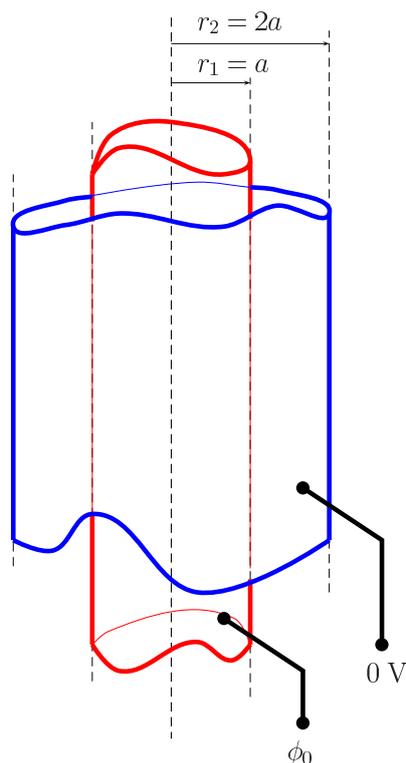


Figure 6. Condensateur cylindrique.

24. - Montrez que cette forme respecte les symétries du problème.
25. - Déterminez les constantes A_1 et A_2 en fonction des données du problème, puis tracez l'allure de $\phi_{(n)}(r)$ pour $n = -1, +1, +2$.
26. - Calculez le champ électrique $\mathbf{E}_{(n)}$ associé à ce potentiel entre les armatures, la densité d'énergie électrostatique correspondante $u_{(n)}^{\text{es}}$ et l'énergie électrostatique totale $U_{(n)}^{\text{es}}$, puis déduisez de cette dernière l'expression de la capacité associée par unité de longueur $C_{(n)}$ du condensateur.
27. - Calculez les valeurs numériques de $C_{(n)}/2\pi\epsilon_0$ pour $n = -2, -1, +1, +2$.
28. - Quelle observation pouvez-vous faire à partir de ces valeurs numériques ?

II.1.2. Calcul exact de la capacité

29. - A l'aide de vos connaissances d'électrostatique, déterminez l'expression exacte du champ électrique \mathbf{E} et du potentiel électrostatique $\phi(r)$ associé.
30. - Calculez l'énergie électrostatique associée par unité de longueur U^{es} .
31. - Calculez la capacité par unité de longueur puis la valeur numérique de $C/2\pi\epsilon_0$. Commentez.
32. - Proposez un principe général dont on puisse déduire l'équation de Laplace comme une équation de mouvement.

II.2. Forme variationnelle de l'électromagnétisme

II.2.1. Équations de Maxwell, équations de Poisson

33. - Rappelez les équations de Maxwell dans le vide *en présence de sources* \mathbf{j} et ρ .

34. - Rappelez l'expression des équations de Maxwell *sans sources* et montrez qu'elles sont satisfaites dès lors que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont définis en fonction des potentiels ϕ et \mathbf{A} par les relations usuelles à préciser.

35. - Rappelez les équations satisfaites en régime statique par $\nabla^2\phi$ et $\nabla^2 \cdot \mathbf{A}$ en présence de sources \mathbf{j} et ρ (on les appellera équation de Poisson et équation de Poisson « magnétique »). On utilisera la jauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

36. - Pour un problème d'électrostatique présentant une symétrie *cylindrique* (la distribution volumique de charge $\rho(r)$ ne dépend que de r , la variable radiale habituelle des coordonnées cylindriques), l'équation de Poisson peut s'obtenir en minimisant la fonctionnelle

$$F^{\text{es.}}[\phi] = 2\pi h \int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 - \rho(r)\phi(r) \right) r \right] dr. \quad (26)$$

h est une longueur de référence suivant l'axe z . Établissez une analogie entre les équations (26) et (18) en précisant les rôles joués ici par t , q , \dot{q} , K et V et déduisez de l'équation de Lagrange associée l'équation du mouvement pour le potentiel ϕ .

37. - Pour un problème de magnétostatique présentant également une symétrie *cylindrique* (la distribution volumique de courants est de la forme $\mathbf{j} = j_z(r)\mathbf{u}_z$), l'équation de Poisson « magnétique » peut s'obtenir en rendant extrémale la fonctionnelle

$$F^{\text{mag.}}[A_z] = 2\pi h \int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} \right)^2 - j_z(r)A_z(r) \right) r \right] dr. \quad (27)$$

Procédez de la même manière qu'à la question précédente pour déterminer l'équation de mouvement de A_z .

II.2.2. Lagrangien de Schwarzschild et équations de Maxwell

Généralisant le traitement de la section II.2.1, Schwarzschild a démontré en 1903 les équations de Maxwell *en présence de sources* \mathbf{j} et ρ en appliquant le principe de moindre action à

$$S_{\text{Schw.}}[\phi, \mathbf{A}] = \int_{\Omega} dt d^3r \mathcal{L}_{\text{Schw.}}(\phi, \mathbf{A}) \quad (28)$$

où

$$\mathcal{L}_{\text{Schw.}}(\phi, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (|\mathbf{E}|^2 - c^2 |\mathbf{B}|^2) - \rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \quad (29)$$

où les différents symboles ont leur signification usuelle. Les champs sont tous des fonctions de \mathbf{r} et t . Le domaine d'intégration est noté Ω et les sources \mathbf{j} et ρ sont nulles aux bords du domaine d'intégration.

38. - Schwarzschild est davantage connu dans le contexte astrophysique. Citez ce dont il s'agit.

39. - En vous aidant des équations (26) et (27), donnez quelques éléments de justification de l'action de Schwarzschild. Commentez en particulier la transformation (sans tenter de l'effectuer) du lagrangien par changement de référentiel galiléen.

40. - En demandant que la variation de l'action (28) sous la transformation (24) soit nulle pour toute fonction $\alpha(\mathbf{r}, t)$ s'annulant aux bords du domaine d'intégration, montrez que l'on obtient une loi fondamentale de conservation. De quelle loi de conservation s'agit-il? La symétrie associée à cette loi de conservation est appelée *symétrie de jauge*.

III. - Symétrie de jauge en mécanique quantique

Dans cette partie, on montrera qu'en mécanique quantique les transformations de jauge des potentiels ne suffisent pas à laisser la physique invariante et qu'il faut leur associer une transformation de la fonction d'onde.

III.1. Changement de jauge en mécanique quantique

41. - On considère une particule sans spin de charge e dont la dynamique est gouvernée par les opérateurs hamiltonien \hat{H} et impulsion $\hat{\mathbf{p}}$,

$$\hat{H} \equiv i\hbar\partial_t, \quad \hat{\mathbf{p}} \equiv -i\hbar\nabla. \quad (30)$$

Ecrivez l'équation de Schrödinger dépendant du temps à l'aide des équations (21) et montrez qu'elle peut se mettre sous la forme

$$i\hbar\mathcal{D}_t\psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\mathcal{D})^2\psi, \quad (31)$$

où l'on a défini les « dérivées covariantes » \mathcal{D}_t et \mathcal{D} telles que

$$i\hbar\mathcal{D}_t \equiv i\hbar\partial_t - e\phi, \quad -i\hbar\mathcal{D} \equiv -i\hbar\nabla - e\mathbf{A}. \quad (32)$$

42. - On s'intéresse à l'effet sur la dynamique de la transformation

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = e^{ie\alpha(\mathbf{r}, t)/\hbar}\psi(\mathbf{r}, t) \equiv G(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t), \quad (33)$$

où $\alpha(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}$ est une fonction de l'espace et du temps ne présentant pas de singularité. Les dérivées de la fonction d'onde ne se transforment pas comme la fonction d'onde elle-même. Montrez qu'en revanche les dérivées covariantes $\mathcal{D}_t\psi$ et $\mathcal{D}\psi$, elles, se transforment comme ψ ($\psi \rightarrow \psi' = G\psi$), c'est-à-dire

$$i\hbar\mathcal{D}_t\psi \rightarrow i\hbar\mathcal{D}'_t\psi' = i\hbar G\mathcal{D}_t\psi, \quad -i\hbar\mathcal{D}\psi \rightarrow -i\hbar\mathcal{D}'\psi' = -i\hbar G\mathcal{D}\psi \quad (34)$$

si l'on impose les lois de transformation

$$\phi' = \phi - \partial_t\alpha, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\alpha. \quad (35)$$

43. - Si ψ représente une particule de charge e en présence de champs ϕ et \mathbf{A} , alors ψ' obéit à la dynamique de cette particule en présence des potentiels électromagnétiques ϕ' et \mathbf{A}' . Exprimez les champs \mathbf{E}' et \mathbf{B}' associés. S'agit-il du même problème physique?

44. - Nous sommes toujours dans le cas d'une particule chargée (de charge e) sous champ électromagnétique quelconque dérivant des potentiels ϕ et \mathbf{A} . On se place en jauge

de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. A partir de l'équation de Schrödinger (31) et de l'équation complexe conjuguée associée, établissez une équation de conservation

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (36)$$

et montrez que $\rho = e|\psi|^2$, comme c'est le cas en l'absence du champ électromagnétique, alors que la densité de courant \mathbf{j} comprend maintenant deux termes,

$$\mathbf{j}_{\text{para.}} = \frac{-ie\hbar}{2m}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (37)$$

$$\mathbf{j}_{\text{dia.}} = -\frac{e^2}{m} \mathbf{A} \psi^* \psi \quad (38)$$

appelés respectivement paramagnétique et diamagnétique.

45. - Les densités de charge et de courant paramagnétique, diamagnétique et totale sont-elles invariantes de jauge ? Quelles conséquences en déduisez-vous ?

III.2. Courants persistants dans un anneau mésoscopique

On considère un anneau métallique circulaire infiniment fin, de rayon a , plongé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à son plan $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$ (figure 7). Le flux du champ magnétique à travers l'anneau est noté Φ et on introduit le quantum de flux $\Phi_0 = 2\pi\hbar/|e_e|$ (où $e_e = -|e_e|$ est la charge électronique). On s'intéresse aux états quantiques d'électrons susceptibles de se déplacer librement dans cet anneau. On négligera totalement les interactions entre électrons et les effets de spin. On utilise un système de coordonnées cylindriques où l'angle repérant la position de l'électron sur l'anneau est noté φ .

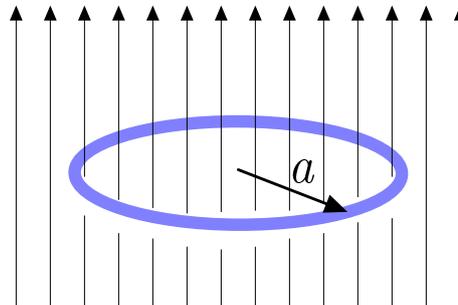


Figure 7. Anneau mésoscopique plongé dans un champ magnétique uniforme.

Dans toute cette partie, on admet qu'imposer aux électrons de se déplacer sur l'anneau revient à prendre pour hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(-\frac{i\hbar}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + |e_e| A_\varphi \right)^2 \quad (39)$$

où A_φ est la composante orthoradiale du potentiel vecteur sur l'anneau.

III.2.1. Résolution de l'équation de Schrödinger

46. - Exprimez le potentiel vecteur \mathbf{A} associé au champ magnétique sous la forme $A_\varphi(r)\mathbf{u}_\varphi$ (coordonnées cylindriques) et précisez sa valeur sur l'anneau en $r = a$.

47. - Ecrivez l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires d'un électron dans l'anneau en introduisant le rapport Φ/Φ_0 où $\Phi = B\pi a^2$ est le flux du champ magnétique à travers l'anneau et précisez les conditions aux limites pour la fonction d'onde.

48. - Précisez les fonctions propres normées de \hat{H} , notées $\psi_\ell(\varphi)$ (il est avantageux de chercher d'abord les fonctions propres de l'opérateur $-i\partial_\varphi + \Phi/\Phi_0$). Montrez que les énergies propres associées sont données par

$$E_\ell = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\ell + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad (40)$$

où ℓ est un entier relatif.

49. - Tracez l'allure de E_ℓ en fonction de Φ/Φ_0 pour les premières valeurs de ℓ .

50. - On s'intéresse maintenant aux propriétés du spectre d'énergie en fonction du champ magnétique.

- Montrez que ce spectre est le même pour 2 valeurs du champ dont la différence correspond à un nombre entier de quanta de flux à travers l'anneau.

- Montrez également que le spectre ne dépend pas du sens du champ magnétique.

III.2.2. Changement de jauge

51. - Déterminez en fonction de B , r et φ le changement de jauge $\alpha(r, \varphi)$ qui permet d'éliminer la composante suivant \mathbf{u}_φ du potentiel vecteur.

- Calculez le potentiel vecteur \mathbf{A}' dans la nouvelle jauge.

- Que se passe-t-il lorsqu'on parcourt un tour sur l'anneau ?

52. - Montrez que le calcul de la circulation de \mathbf{A}' le long de l'anneau ne permet pas de retrouver le flux du champ magnétique. Calculez la circulation de \mathbf{A}' le long du contour indiqué sur le figure 8 et commentez.

53. - Dans le changement de jauge, la fonction d'onde est également modifiée en ψ' suivant l'équation (33). Précisez les conditions aux limites auxquelles doit obéir la nouvelle fonction d'onde $\psi'(\varphi)$ en prenant garde au signe de e_e dans la définition de Φ_0 .

54. - Exprimez l'hamiltonien (39) dans la nouvelle jauge. Commentez.

55. - Résolvez le problème des états stationnaires dans cette nouvelle jauge et commentez les résultats.

III.2.3. Courants persistants

56. - A l'aide des équations (37) et (38), calculez la densité de courant électrique dans les deux jauges. Discutez l'invariance de jauge éventuelle des courants.

57. - Calculez l'expression $-dE_\ell/d\Phi$ et comparez aux résultats de la question précédente.

- Interprétez votre résultat à l'aide des lois élémentaires de l'induction électromagnétique.

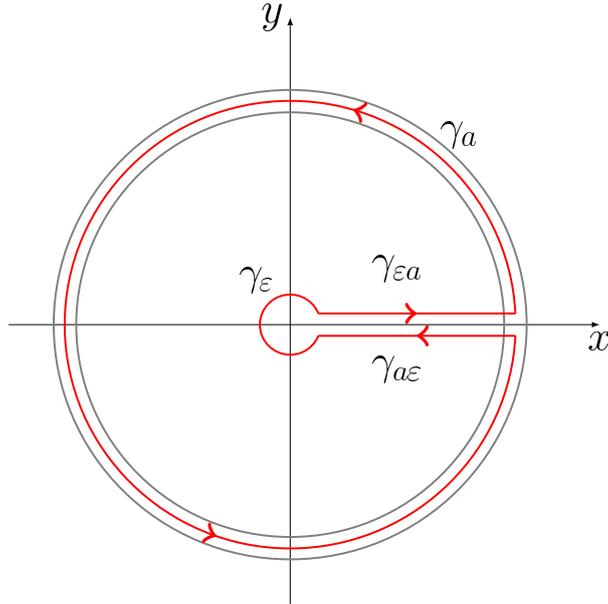


Figure 8. Contour d'intégration : γ_a est un cercle de rayon a qui parcourt le périmètre de l'anneau à une coupure près mesurée par $2\varepsilon \rightarrow 0$ et γ_ε est un cercle de rayon infinitésimal ε entourant l'origine. $\gamma_{\varepsilon a}$ et $\gamma_{a\varepsilon}$ permettent de fermer le contour.

58. - On se place maintenant à une valeur donnée de Φ/Φ_0 , que l'on choisira comprise entre 0 et 1/2 compte tenu des résultats de la partie III.2.1.

– Montrez sans calcul que les courants persistants associés à deux niveaux d'énergie consécutifs sont de signes opposés.

– Plus précisément, montrez que si l'on indice les niveaux dans l'ordre croissant des énergies par un entier $p = 0, 1, 2, \dots$, on a

$$j_{2k} = -\frac{|e_e|\hbar}{2\pi m a^2} \left(k + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad p = 2k \quad (41)$$

et

$$j_{2k+1} = \frac{|e_e|\hbar}{2\pi m a^2} \left(k + 1 - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad p = 2k + 1. \quad (42)$$

59. - Soit N le nombre d'électrons dans l'anneau. Montrez qu'à température nulle, pour des électrons dont on néglige le spin (c'est-à-dire qu'on place un seul électron par niveau), le courant persistant total dans l'anneau s'écrit

$$J_N = J_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad \text{si } N \text{ est pair} \quad (43)$$

$$J_N = -J_0 \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \text{si } N \text{ est impair} \quad (44)$$

où

$$J_0 = \frac{|e_e|\hbar N}{2\pi m a^2}. \quad (45)$$

60. - Comment les résultats ci-dessus sont-ils modifiés pour $-1/2 \leq \Phi/\Phi_0 \leq 0$?

61. - Représentez sur un même graphique J_N/J_0 en fonction de Φ/Φ_0 pour N pair et N impair. On se limitera à $-1/2 \leq \Phi/\Phi_0 \leq +1/2$. La valeur de J_N varie-t-elle de façon extensive avec le nombre d'électrons ?

62. - On considère maintenant un grand nombre d'anneaux identiques comprenant un nombre arbitraire d'électrons (pair ou impair). Représentez sur le graphique précédent le courant persistant moyen par anneau. Commentez sa valeur et sa période.

IV. - Brisure spontanée de symétrie

Pour caractériser les transitions de phase du second ordre, nous allons présenter succinctement un modèle mécanique qui peut servir de métaphore aux brisures de symétrie rencontrées dans l'étude des transitions de phase.

IV.1. Analogie mécanique

Considérons un tube en forme de tore incomplet (en Ω) placé verticalement dans le champ de pesanteur uniforme comme l'indique la figure 9 et contenant dans chacun des compartiments une mole de gaz parfait. Une bille de masse m est susceptible de se déplacer sans frottement, mais elle sépare hermétiquement les deux compartiments. Le volume total disponible pour le gaz vaut $2V_0$, l'aire de la section droite du tore est notée \mathcal{A} , le grand rayon du tore est L et le volume occupé par la bille est négligeable de sorte que $L\mathcal{A}/V_0 \ll 1$. Le tout baigne à l'équilibre thermique dans un thermostat à température T .

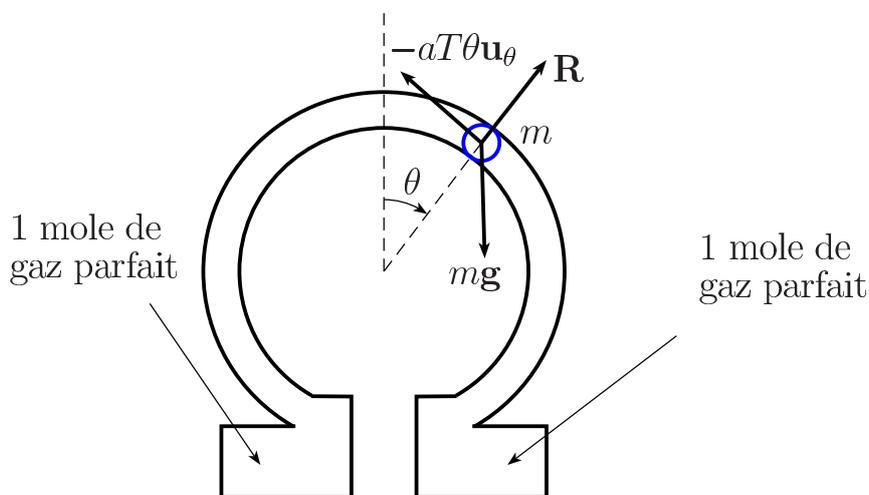


Figure 9. Modèle mécanique de transition de phase du second ordre.

Lorsque la bille est dans une position inclinée d'un angle θ , la différence des pressions entre les deux compartiments produit une force de rappel tangentielle proportionnelle à T .

63. - Exprimez cette force sous la forme $aT\theta$ où vous donnerez l'expression du coefficient a en fonction des caractéristiques du gaz et du tube.

64. - Recherchez les positions d'équilibre θ_0 et proposez une méthode graphique permettant de trouver leurs valeurs.

65. - Déterminez la température « critique » T_c du système à laquelle se produit une brisure de symétrie. Représentez l'allure de l'angle d'équilibre $\theta_0(T)$ en fonction de la température.

66. - Déterminez l'exposant critique β décrivant la manière dont croît l'angle $\theta_0(T)$ lorsque T diminue juste en dessous de la température critique,

$$\theta_0(T) \simeq \text{const.} |T - T_c|^\beta \quad \text{pour } T \rightarrow T_c^- . \quad (46)$$

67. - On se place maintenant dans la situation où $\theta > 0$, on tient compte d'une force supplémentaire constante opposée à la force de rappel, $F = h\mathbf{u}_\theta$ avec $h \ll mg$. La nouvelle position d'équilibre est notée $\theta_h(T) = \theta_0(T) + \Delta\theta(T)$. Faites une nouvelle représentation graphique et tracez l'allure de $\theta_h(T)$ sans chercher à en déterminer la forme mathématique.

68. - Calculez la susceptibilité mécanique $\chi = (\partial\theta_h/\partial h)_{h=0}$ au-dessus et au-dessous de T_c , ainsi que les exposants critiques γ et γ' associés,

$$\chi_>(T) \simeq \Gamma |T - T_c|^{-\gamma} \quad \text{pour } T \rightarrow T_c^+ , \quad (47)$$

$$\chi_<(T) \simeq \Gamma' |T - T_c|^{-\gamma'} \quad \text{pour } T \rightarrow T_c^- , \quad (48)$$

(les deux constantes Γ et Γ' sont différentes mais on ne demande pas leurs valeurs). Tracez l'allure de la susceptibilité en fonction de T .

69. - Lorsqu'on se place sur l'isotherme critique, à $T = T_c$, en présence de la force externe h supposée petite, on définit l'exposant critique δ par la relation

$$\theta_h(T_c) \propto h^{1/\delta} . \quad (49)$$

Déterminez la valeur de δ .

IV.2. Développement de Landau

70. - Pour estimer l'énergie libre totale du système, on prend en compte l'énergie libre des deux moles de gaz parfait (supposé monoatomique), l'énergie libre des structures solides qui ne dépend que de la température (on néglige tout effet de dilatation) et l'énergie potentielle de la bille. Cette dernière comprend une contribution due au poids et une contribution due à la force externe en h , la contribution des forces de pression est déjà incluse dans l'énergie libre du gaz.

Donnez les expressions de ces contributions puis calculez l'énergie libre totale F_{tot} en fonction de θ en groupant les diverses contributions qui ne dépendent que de la température dans un terme $F_1(T)$ non pertinent pour la suite et que vous ne cherchiez pas à détailler, $F_{\text{tot}} = F_1(T) + F(\theta(T))$.

71. - Au voisinage de la température T_c , exprimez le développement limité de l'énergie libre au quatrième ordre en θ sous la forme

$$F(\theta) = F_0 - hL\theta + \frac{1}{2}r_0L\theta^2 + \frac{1}{4}u_0L\theta^4 + O(\theta^6) \quad (50)$$

[on donne les développements

$$\cos \epsilon \simeq 1 - \epsilon^2/2 + \epsilon^4/24$$

$$\ln(1 + \epsilon) \simeq \epsilon - \epsilon^2/2 + \epsilon^3/3 - \epsilon^4/4 \quad .]$$

- Que valent r_0 et u_0 ?
- Que pensez-vous des approximations $r_0 \simeq \text{const.}(T - T_c)$ et $u_0 \simeq \text{const.}$ où les deux constantes (différentes) sont positives ?
- 72. - Tracez l'allure de $F(\theta)$ pour $h = 0$ à $T > T_c$, $T = T_c$, $T < T_c$.
- Retrouvez la valeur d'équilibre θ_0 en fonction des paramètres r_0 et u_0 dans les trois régimes de températures.

V. - Théorie de Ginzburg-Landau de la supraconductivité

L'apparition de la supraconductivité au-dessous d'une certaine température critique constitue une transition de phase. Nous exploiterons dans cette partie la formulation de Ginzburg-Landau, dans laquelle l'énergie libre est développée de manière analogue à ce que nous avons vu dans le modèle mécanique.

V.1. Généralités

- 73. - Donnez quelques exemples (au moins trois) de phases quantiques macroscopiques en précisant à chaque fois une propriété qui relève du caractère quantique.
- 74. - Dans le cas de la supraconductivité, quelles caractéristiques remarquables pouvez-vous citer ? Rappelez les dates approximatives des découvertes importantes, théoriques ou expérimentales, ainsi que les noms des physiciens qui les ont faites.

V.2. L'approche de London et London

Le phénomène de supraconductivité a été mis en évidence expérimentalement par la disparition de la résistivité au-dessous d'une certaine température critique T_c et par la propagation de courants persistants dans des circuits supraconducteurs. Ces phénomènes ont trouvé une interprétation dans le cadre de la théorie des frères London.

75. - Fritz London et Heinz London ont proposé d'interpréter les courants permanents par une modification de la loi d'Ohm locale.

– Ecrivez l'équation de mouvement sous champ électrique \mathbf{E} d'une charge e , participant au « fluide électronique supraconducteur », animée d'une vitesse \mathbf{v}_s . La charge est supposée n'être soumise à aucun frottement en raison de l'annulation de la résistivité. Précisez la raison pour laquelle on peut négliger également la force d'origine magnétique.

– Montrez qu'on en déduit la relation

$$\partial_t(\nabla \times \mathbf{j}_s + \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B}) = 0, \quad (51)$$

où n_s est la densité volumique de « porteurs supraconducteurs » et \mathbf{j}_s la densité de courant électrique associée.

– En supposant nulle la constante d'intégration, montrez qu'on peut en déduire une loi locale de la forme

$$\mathbf{j}_s = -\Lambda \mathbf{A} \quad (52)$$

connue sous le nom de formule de London et London. Donnez l'expression de Λ .

76. - Commentez la situation physique proposée du point de vue de l'opération de renversement temporel pour montrer le caractère non dissipatif des courants de London.

77. - On combine cette définition aux équations de Maxwell.

- Montrez à l'aide de l'équation obtenue que l'on explique l'effet Meissner, c'est-à-dire l'expulsion du champ magnétique du volume du supraconducteur sur une échelle de longueur appelée longueur de London et notée λ_L .

- Montrez qu'en volume (c'est-à-dire pour des distances à la surface du matériau supérieures à λ_L), le courant est nul.

- Exprimez Λ en fonction de λ_L . La longueur de London varie avec la température dans la phase supraconductrice selon une loi empirique de la forme

$$\lambda_L(T) = \lambda_L(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}. \quad (53)$$

- Que se passe-t-il à la température de transition ?

78. - Expliquez l'expérience présentée sur la photo de la figure 10. La pastille de forme hexagonale est une céramique supraconductrice à basse température, le cube est un matériau ferromagnétique.

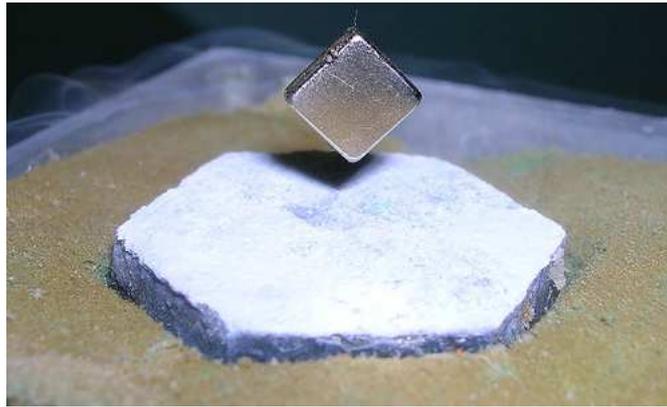


Figure 10. Lévitacion magnétique.

V.3. Thermodynamique des supraconducteurs homogènes

Lorsque l'on soumet à une excitation magnétique élémentaire \mathbf{H} un matériau solide *de volume constant*, susceptible d'acquérir une aimantation (par unité de volume) \mathbf{M} (on rappelle que le champ magnétique qui règne dans l'échantillon est alors $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$), il en résulte pour le matériau un gain énergétique par unité de volume noté $\delta W = \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ de sorte que la densité volumique d'énergie libre du matériau $f(T, \mathbf{M})$ peut s'écrire sous forme différentielle comme

$$df = -s dT + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (54)$$

où s est la densité d'entropie. Dans toute la suite du problème, les quantités thermodynamiques notées avec des lettres minuscules sont des densités volumiques.

79. - La densité d'enthalpie libre associée $g(T, \mathbf{H})$ s'obtient par une transformation de Legendre $g = f - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$. Quel est l'intérêt de cette fonction d'état par rapport à l'énergie libre ? Exprimez la différentielle dg .

80. - Un matériau supraconducteur de type I exhibe une phase normale et une phase dite de Meissner dans laquelle $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$. Cette phase est limitée aux basses températures $T \leq T_c$ et aux excitations magnétiques inférieures à une valeur critique $H_c(T)$ qui dépend de la température. Quelle propriété remarquable possède cette phase ? Pourquoi parle-t-on de diamagnétisme parfait ?

81. - Évaluez la différence de densité d'enthalpie libre $g_S(T, \mathbf{H}) - g_S(T, 0)$ en phase supraconductrice (l'indice S est pour « supraconducteur »). En supposant la phase normale non magnétique ($\mathbf{M}_N = 0$), l'enthalpie libre en phase normale dépend très peu de \mathbf{H} , de sorte que $g_N(T, \mathbf{H}) \simeq g_N(T, 0)$ (avec l'indice N pour « normal »).

- En déduire l'énergie de stabilisation $g_S(T, 0) - g_N(T, 0)$ de la phase supraconductrice à la température T en fonction de μ_0 et $H_c(T)$.

- Représentez sur une même figure l'allure des fonctions $g_S(T, \mathbf{H})$ et $g_N(T, \mathbf{H})$ en fonction du champ H à température fixée.

82. - Calculez la différence de densité d'entropie $s_S(T, \mathbf{H}) - s_N(T, \mathbf{H})$ entre les deux phases en fonction du champ critique $H_c(T)$ et de sa dérivée dH_c/dT . Empiriquement, on constate que la variation du champ critique avec la température suit la loi

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right). \quad (55)$$

- Déterminez l'ordre de la transition de phase en champ nul à T_c et en champ non nul à $T < T_c$.

83. - Déterminez la différence de chaleur spécifique par unité de volume entre les phases supraconductrice et normale, $c_S - c_N$, en fonction du champ critique $H_c(T)$ et de ses dérivées par rapport à la température.

- La chaleur spécifique du matériau (métallique) dans la phase normale est donnée par celle du gaz électronique, $c_N(T) = \gamma_e T$.

- L'expérience montre par ailleurs que le rapport c_S/T en phase supraconductrice s'annule dans la limite $T \rightarrow 0$. Déduisez l'expression de $c_S - c_N$ en fonction de T_c et $H_c(0)$ et de la température, puis identifiez γ_e en fonction des mêmes paramètres, exprimez $c_S(T)$.

V.4. Théorie de Ginzburg-Landau

V.4.1. Équations de Ginzburg-Landau

84. - Une partie substantielle de ce sujet repose sur des travaux réalisés par Lev Davidovitch Landau. Il fait partie des physiciens qui ont marqué le XX^{ème} siècle. Citez deux ou trois de ses contributions marquantes à la physique, que ce soit en tant que discipline scientifique ou comme institution académique.

On traduit ci-dessous en français quelques extraits de la section II d'un article célèbre de L.D. Landau et V.L. Ginzburg (JETP **20**, 1064, 1950) Le texte est retranscrit en unités SI et en adoptant des notations conformes à celles de ce sujet.

Sur la théorie de la supraconductivité

I. Introduction

On sait qu'il n'existe pas à ce jour de théorie microscopique convaincante de la supraconductivité. Il est cependant généralement admis que la théorie phénoménologique de la supraconductivité est satisfaisante et fondée sur l'équation de F. London et H. London :

$$(1) \quad \nabla \times \mathbf{j}_s / \Lambda = -\mathbf{B}$$

où Λ est une quantité qui dépend uniquement de la température, \mathbf{j}_s est la densité de supercourant, [...] et \mathbf{B} est l'intensité du champ magnétique,

[...]

II. Equations de base

En l'absence de champ magnétique, la transition vers l'état supraconducteur à la température T_c est une transition de phase du second ordre. Dans la théorie générale de ces transitions de phase, il apparaît toujours un paramètre η qui diffère de zéro dans la phase ordonnée et s'annule dans la phase désordonnée. Par exemple, dans les corps ferroélectriques, la polarisation spontanée joue le rôle de η et dans les ferromagnétiques c'est l'aimantation spontanée qui joue ce rôle. Dans le phénomène de supraconductivité, dans lequel c'est la phase supraconductrice qui est ordonnée, nous utiliserons ψ pour représenter ce paramètre caractéristique. Pour des températures au-dessus de T_c , $\psi = 0$ à l'équilibre thermodynamique, alors qu'aux températures au-dessous de T_c , $\psi \neq 0$. Nous allons commencer avec l'hypothèse que ψ représente une fonction d'onde "effective" des "électrons supraconducteurs". En conséquence, ψ peut être déterminée précisément, à une phase constante près. De cette façon, toutes les quantités observables doivent dépendre de ψ et ψ^* de telle sorte qu'elles restent inchangées si ψ est multipliée par une constante de la forme $e^{i\alpha}$. On peut aussi [...] choisir de la manière habituelle la normalisation de ψ pour que $|\psi|^2$ soit égale à la concentration, n_s , des "électrons supraconducteurs".

Considérons tout d'abord un supraconducteur uniforme en l'absence de champ magnétique, et supposons que ψ soit indépendante de la position. L'énergie libre du supraconducteur, conformément à la théorie générale des transitions de phase du second ordre, dépend alors uniquement de $|\psi|^2$ et peut être développée en série au voisinage de T_c . On peut donc écrire la densité d'énergie libre $f_{S,0}$ [Note : la notation se réfère à la phase supraconductrice (S) et à l'absence de champ magnétique (0). $f_{N,0}$ se rapporte à la phase normale (N) sans champ.]

$$(6) \quad f_{S,0} = f_{N,0} + r_0 |\psi|^2 + \frac{u_0}{2} |\psi|^4,$$

[...] dans laquelle on a tenu compte du fait que dans les conditions de validité du développement (6), $r_0(T) = \left(\frac{dr_0}{dT}\right)_{T_c} (T - T_c)$ et $u_0(T) = u_0(T_c)$.

[...]

Considérons maintenant un supraconducteur placé dans un champ magnétique indépendant du temps. Pour obtenir la densité d'énergie libre totale $f_{S,B}$, il est maintenant nécessaire d'ajouter à $f_{S,0}$ l'énergie du champ $\frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2$ et l'énergie associée à l'éventuelle apparition d'un gradient de ψ en présence du champ. Cette dernière énergie, au moins pour de petites valeurs de $|\nabla\psi|^2$, peut [...] être exprimée sous la forme $const. |\nabla\psi|^2$,

c'est-à-dire qu'elle ressemble à la densité d'énergie cinétique en mécanique quantique. Nous écrivons donc l'expression correspondante sous la forme $\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi|^2 = \frac{1}{2m}|-i\hbar\nabla\psi|^2$ où \hbar est la constante de Dirac et m un certain coefficient. Nous n'avons toutefois pas encore pris en compte l'interaction entre le champ magnétique et le courant associé à la présence de $\nabla\psi$. D'après ce qui vient d'être dit, et l'exigence que le schéma complet soit invariant de jauge, on doit autoriser l'influence du champ par la substitution usuelle de $-i\hbar\nabla$ en $-i\hbar\nabla - e\mathbf{A}$, où \mathbf{A} est le potentiel vecteur du champ et e est une charge, qu'il n'y a pas lieu de considérer différente de la charge électronique. [...] Par conséquent,

$$(9) \quad f_{S,B} = f_{S,0} + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2 + \frac{1}{2m}|-i\hbar\nabla\psi - e\mathbf{A}\psi|^2.$$

[Note : la notation $f_{S,B}$ se réfère à la phase supraconductrice sous champ magnétique non nul (B).]

L'équation pour ψ peut maintenant être obtenue en demandant que l'énergie libre totale du corps, $\int f_{S,B}d^3r$, soit aussi petite que possible [...].

85. - L'article date de 1950. Landau et Ginzburg indiquent qu'il n'existe pas de théorie microscopique convaincante.

- Qu'en est-il depuis cette date ?

- Dans un métal supraconducteur conventionnel, quelle est la charge e des particules qui participent au transport électrique ?

86. - Quelles sont les raisons qui conduisent les auteurs

- à développer l'énergie libre en puissances de $|\psi|$?

- à postuler que r_0 est positif au-dessus de la température de transition et négatif au-dessous alors que u_0 est toujours positif ?

- à introduire la quantité $(-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})\psi$ pour prendre en compte les fluctuations spatiales de la fonction d'onde ?

87. - De l'expression (9) de leur article, on déduit par minimisation (ces résultats sont admis) les équations de Ginzburg-Landau

$$r_0\psi(\mathbf{r}) + u_0|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla + 2|e_e|\mathbf{A})^2\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (56)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} = \frac{i|e_e|\hbar}{m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{4|e_e|^2}{m}\mathbf{A}|\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (57)$$

En vous appuyant sur les résultats de la partie IV et de la section III.1, et sur l'extrait de l'article reproduit ci-avant, commentez sans les démontrer les différents termes qui apparaissent dans les équations (56) et (57).

V.4.2. Supraconducteur homogène

88. - En l'absence de champ extérieur et pour un supraconducteur homogène ($\psi = \psi_0$ est uniforme), déterminez l'expression de la densité supraconductrice $n_s(T) = |\psi_0|^2$ au-dessus et au-dessous de T_c en fonction des paramètres r_0 et u_0 puis en fonction de la température.

89. - Calculez ensuite la différence d'entropie en champ nul par unité de volume $s_S - s_N$ puis la différence de chaleur spécifique par unité de volume $c_S - c_N$ en fonction de la température et des paramètres $\left(\frac{dr_0}{dT}\right)_{T_c}$ et u_0 .

90. - On suppose maintenant qu'un champ magnétique est appliqué.

- Si le supraconducteur est homogène et représenté par une fonction d'onde uniforme, ψ_0 , que devient la densité de courant ?

- Comparez à l'hypothèse de London et London et déterminez la valeur de la constante Λ .

91. - A partir de l'énergie de stabilisation de la phase supraconductrice calculée à la section V.3, et en notant qu'au voisinage de la transition du second ordre $f \simeq g$, exprimez $H_c(T)$ en fonction de r_0 et u_0 et montrez la compatibilité avec la forme empirique (55) dans le voisinage de T_c .

92. - A l'aide des questions précédentes, exprimez les coefficients r_0 et u_0 du développement de Landau en fonction des quantités mesurables $H_c(T)$ et $\lambda_L(T)$ et vérifiez les hypothèses de Ginzburg et Landau relativement à ces paramètres r_0 et u_0 au voisinage de T_c .

V.4.3. Supraconducteur inhomogène sous champ magnétique

Si un échantillon supraconducteur non connexe est soumis à un champ magnétique, il peut être impossible de trouver une fonction d'onde uniforme, même en volume. Supposons un échantillon de forme torique, soumis dans la phase normale à un champ magnétique homogène parallèlement à l'axe de révolution du tore. On refroidit l'échantillon qui passe en phase supraconductrice et qui piège un flux magnétique Φ . Pour expulser les lignes de champ magnétique du volume du matériau, des courants diamagnétiques concentriques se répartissent en surface dans une épaisseur de l'ordre de λ_L . En volume, ces courants sont nuls.

93. - Dans la phase de basse température, on choisit de paramétrer la fonction d'onde d'un supraconducteur éventuellement inhomogène par $\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) e^{i\theta(\mathbf{r})}$ où l'amplitude $f(\mathbf{r})$ est réelle et $\theta(\mathbf{r})$ représente la phase locale. Donnez l'expression de la densité de courant en fonction de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, de $f(\mathbf{r})$ et de $\theta(\mathbf{r})$.

94. - Montrez que l'hypothèse d'une fonction d'onde uniforme conduirait à une densité de courant

$$\mathbf{j}_S = -(4e^2 n_s / m)(\Phi / 2\pi r) \mathbf{u}_\varphi \quad (58)$$

inacceptable car *non nulle* en volume.

95. - Argumentez alors sur la nécessité d'une phase locale $\theta(\mathbf{r})$ et montrez que l'annulation des courants en volume impose une contrainte sur la phase de la fonction d'onde qui conduit à la quantification du flux Φ du champ magnétique. Estimez la valeur numérique du quantum de flux Φ_0 de la supraconductivité.

V.4.4. Mécanisme d'Anderson de brisure spontanée de la symétrie de jauge dans un supraconducteur soumis à un champ magnétique

96. - L'équation (52) de la théorie de London et London et qu'on retrouve également dans la théorie de Ginzburg et Landau souffre a priori d'un problème fondamental vis-à-vis des transformations de jauge. Discutez cette difficulté.

97. - Dans le cas simplifié d'un supraconducteur homogène de fonction d'onde ψ_0 , écrivez l'énergie libre (6)-(9) de l'article de Ginzburg et Landau.

- Montrez qu'elle n'est pas invariante de jauge (on dit que la jauge est *fixée* par l'existence d'une fonction d'onde ψ_0 uniforme).

- Cela s'appelle le mécanisme d'Anderson, précurseur du mécanisme de Higgs. Qu'évoque pour vous le nom de Higgs et l'appellation modèle standard ?

Fin du problème