

SESSION 2024

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : CHIMIE**

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1500B	102	0385

L'acoustique : de la Terre vers Mars

Table des matières

1 ^{ère} partie : de la Terre à Mars	1
2 ^{ème} partie : à propos des ondes sonores	3
3 ^{ème} partie : de la conception d'un microphone à électret à ses usages sur Mars.....	5
Annexes	10

Les trois parties sont indépendantes.

L'usage des majuscules et des minuscules pour les variables physiques requiert votre attention.

La plupart des données numériques sont disponibles dans les annexes.

1^{ère} partie : de la Terre à Mars

En observant les paramètres physiques des planètes telluriques, on ne peut qu'être frappé par l'extrême diversité des conditions de température et de pression à la surface de Mercure, Vénus, de la Terre et de Mars.

L'atmosphère martienne est essentiellement constituée de dioxyde de carbone, d'argon et de diazote ; ce mélange gazeux est assimilé à un gaz parfait, de pression absolue P fonction décroissante de l'altitude, de masse molaire moyenne M . Dans un premier temps, le champ de gravitation auquel est soumis cette atmosphère sera assimilé au champ de pesanteur noté \vec{g}_0 (en $z = 0$), uniforme en altitude. L'atmosphère sera modélisée dans un cadre isotherme avec T_0 , température de surface moyenne martienne. Cette dernière surface, qui correspond à $z = 0$, se situe au niveau du rayon moyen martien R_M . On considèrera une colonne infinitésimale de ce gaz parfait à l'équilibre hydrostatique comme représenté sur la figure 1, de sections droites S_c comprises entre les altitudes z et $z + dz$ selon un axe vertical ascendant.

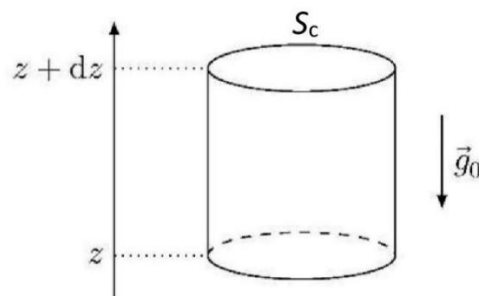


Fig.1

1. Effectuer un bilan des forces qui s'exercent sur la colonne infinitésimale d'épaisseur dz , et établir l'équation différentielle qui relie, à l'équilibre, les pressions $P(z)$, $P(z + dz)$, la masse volumique $\rho(z)$, le champ de pesanteur g_0 et les altitudes z , $z + dz$.
2. En déduire l'équation différentielle reliant $P(z)$, M , g_0 , la constante des gaz parfaits R et T_0 .

3. Résoudre cette équation différentielle. On note P_0 la pression en $z = 0$.

L'épaisseur H de l'atmosphère, dite hauteur d'échelle, est conventionnellement définie comme l'altitude pour laquelle la pression vaut $\frac{P_0}{e}$ (en base népérienne).

4. Exprimer cette épaisseur H dans ce modèle puis la calculer. Commenter l'ordre de grandeur trouvé.

Le rover *Perseverance* a amarsi au fond du cratère Jézéro à l'altitude $z_1 = - 2,25$ km, à la pression atmosphérique de $P_1 = 586$ Pa.

5. Calculer la pression moyenne P_0 au niveau de référence $z = 0$ et la comparer à la valeur mesurée de 636 Pa. Conclure. Déduire, dans le cadre du modèle considéré, la valeur ρ_0 de la masse volumique de l'atmosphère de Mars en $z = 0$.

On affine le modèle en tenant compte de la variation du champ de gravitation \vec{g} avec l'altitude. Pour ce faire, on va appliquer le théorème de Gauss gravitationnel à la planète Mars supposée parfaitement sphérique et de masse M_M uniformément répartie en volume.

6. À partir de l'expression de la force exercée entre deux particules ponctuelles, expliciter l'analogie entre champs électrostatique et gravitationnel.

7. Examiner de façon exhaustive les propriétés de symétrie et d'invariance de cette distribution de masse, et montrer que le champ de gravitation est de nature radiale.

8. Énoncer le théorème de Gauss électrostatique puis son analogue gravitationnel qui lie \vec{g} à la constante universelle de gravitation G et à la masse M_{int} emprisonnée dans la surface de Gauss.

9. Établir l'expression de \vec{g} à l'extérieur de Mars en fonction de G , M_M et de la coordonnée radiale r , puis montrer que son module peut se réécrire en fonction de g_0 et d'un rapport de longueurs.

10. Montrer que la réécriture de l'équation différentielle obtenue à la question 2 dans la nouvelle situation d'un champ gravitationnel variable conduit à l'expression $\frac{d}{dr}(\ln P) = A \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)$. Préciser l'expression littérale de A fonction de M , g_0 , R_M , R et T_0 .

11. Montrer que la solution de cette équation différentielle se met sous la forme $P(H) = P_0 \exp\left(-\frac{R_M}{R_M + H}\right)$ à la hauteur H précédemment définie. Calculer cette pression en utilisant la valeur de P_0 calculée à la question 5.

12. Définir la deuxième vitesse cosmique v_1 , dite *d'échappement*, puis établir son expression à l'aide de considérations énergétiques.

13. Calculer sa valeur pour la Terre, puis pour Mars.

On affine à nouveau le modèle en explorant un cadre non isotherme pour l'atmosphère martienne, avec un gradient constant et vertical en température de la forme $T = T_0 - |\vec{\nabla}T|z$. Pour simplifier l'écriture, on posera $|\vec{\nabla}T| = a$, le gradient étant directement mesuré par le rover *Perseverance* à partir de la surface moyenne martienne (partie 3 du sujet) ; le champ de gravitation est à nouveau assimilé au champ de pesanteur avec $g = g_0$.

14. Montrer que l'équation différentielle qui caractérise l'équilibre hydrostatique peut se mettre sous la forme : $\frac{d}{dz}(\ln P) = B \frac{d}{dz}(\ln(T_0 - az))$. Exprimer la constante B .

15. Résoudre cette équation différentielle et montrer que le profil de pression peut s'écrire $P(z) = P_0(1 - B'z)^B$; expliciter la constante B' .

La température T est une mesure de l'énergie cinétique moyenne d'agitation thermique d'une particule microscopique d'espèce i et de masse molaire associée M_i .

16. Établir la relation qui donne la vitesse quadratique moyenne de la particule v_{qm} dans un cadre classique en fonction de la constante des gaz parfaits R , de T et de M_i . La calculer au niveau du sol pour le constituant le plus abondant dans le cas terrestre puis dans le cas martien.
17. Apprécier ces dernières valeurs à l'aune d'autres vitesses calculées précédemment et expliciter quelles informations peuvent être déduites concernant les atmosphères de ces deux planètes.

2^{ème} partie : à propos des ondes sonores

S'agissant d'une onde sonore, la perturbation $s(x, t)$ consiste en la compression et la dilatation de tranches de fluide. L'une de ces tranches initialement au repos entre x et $x + dx$, de section droite S_f , est alors positionnée en $x + \zeta(x, t)$ en présence de l'onde sonore conformément à la figure 2.

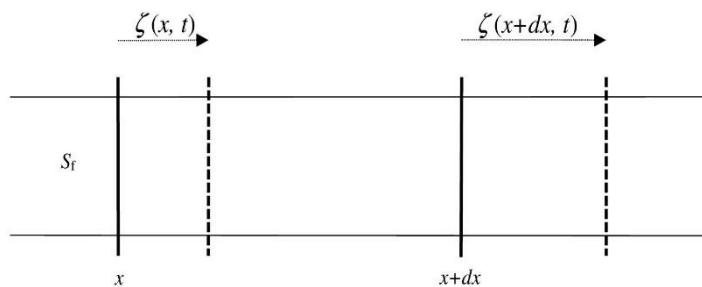


Fig.2

18. Définir ce qu'est un fluide et le comparer à la phase solide.
19. Définir ce qu'est une onde progressive. Indiquer à quel type appartient celle considérée ci-dessus (mécanique, électromagnétique, gravitationnelle ...).
20. Rappeler la gamme des fréquences audibles par l'oreille humaine et nommer les domaines inaudibles.

Dans la suite pour toute position x et à tout temps t , pression et masse volumique valent respectivement $P_0 + p_1(x, t)$ et $\rho_0 + \rho_1(x, t)$, les indices 0 désignant les grandeurs en l'absence d'onde sonore. Nous nous placerons dans un cadre perturbatif pour lequel les quantités sont telles que $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| \ll 1$, $|p_1(x, t)| \ll P_0$ et $|\rho_1(x, t)| \ll \rho_0$ et dans un premier temps non dissipatif (cadre qui pourrait résulter de phénomènes de viscosité).

21. Préciser le caractère longitudinal ou transversal de l'onde considérée.
22. Exprimer la masse infinitésimale dm de la tranche de fluide au repos.
23. En se référant à la figure 2, exprimer le volume de l'élément de fluide lors du passage de l'onde et en déduire qu'elle peut s'écrire $dm = S_f(\rho_0 + \rho_1(x, t)) \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx$.
24. Écrire l'équation de conservation de la masse.
25. En déduire une relation entre ρ_0 , ρ_1 et une dérivée première de ζ .

On fait l'hypothèse que la propagation de l'onde s'accompagne de transformations adiabatiques réversibles, et que dans ce cadre il est pertinent d'introduire la compressibilité isentropique χ_S de la tranche de fluide.

26. Écrire la définition de la compressibilité χ_S qui traduit la variation du volume V du fluide lorsque sa pression P est modifiée à entropie S constante, sachant qu'elle est homogène à l'inverse d'une pression.
27. Montrer alors que cette compressibilité peut s'écrire $\chi_S = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1(x,t)}{p_1(x,t)}$ en la reliant non plus aux volumes avant et après passage de l'onde, mais aux masses volumiques ρ_0 et ρ_1 . Discuter du signe de ρ_1 .
28. Par application de la relation fondamentale de la dynamique à la tranche de fluide, relier ρ_0 aux dérivées temporelles et / ou spatiales de $\zeta(x,t)$ et $p_1(x,t)$ et montrer que l'on aboutit à $\rho_0 \frac{\partial^2 \zeta(x,t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}$.
29. Montrer qu'une simple opération de dérivation permet d'établir l'équation en $p_1(x,t)$ de propagation d'une onde acoustique ; préciser l'expression littérale de sa célérité v en fonction de ρ_0 et de χ_S .
30. Expliciter les différences et les similarités entre la célérité et la vitesse.
31. Énoncer les lois de Laplace pour une transformation isentropique d'un gaz parfait.
32. Dans le cas d'une transformation isentropique pour un gaz parfait, montrer que l'on aboutit à la relation différentielle $\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$, avec l'indice adiabatique du fluide $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.
33. En déduire l'expression de la célérité v de l'onde pour un gaz parfait en fonction de γ , R , de la température T_0 de la tranche supposée uniforme ainsi que de la masse molaire moyenne M du fluide.
34. Calculer la célérité v de l'onde dans l'atmosphère terrestre puis martienne.

Dans un second temps, on considère la dissipation due à la viscosité dynamique μ du fluide. On garde les notations précédentes $\rho_1(x,t)$, $p_1(x,t)$ auxquelles on ajoute la vitesse particulière \vec{V} d'une particule fluide (\vec{V} respecte l'approximation acoustique, c'est-à-dire $|\vec{V}|$ très petit devant v). Les équations locales de l'acoustique en milieu visqueux, c'est-à-dire celle de la conservation de la masse ainsi que celle dite de Navier-Stokes sont rappelées en annexes pour une configuration à 3 dimensions.

35. Parmi les deux équations locales de l'acoustique, fournies en annexes, indiquer laquelle correspond à la conservation de la masse et laquelle est celle de Navier-Stokes. Justifier. Proposer, pour chacune d'entre elles, une analogie tirée d'autres domaines de la physique (mécanique, électromagnétisme ...).
36. Simplifier puis linéariser, en vous arrêtant à l'ordre 1, ces deux équations ainsi que celle démontrée à la question 27 ; on aura préalablement négligé le poids de la particule fluide et introduit la grandeur v^2 de la question 29.
37. Montrer que l'équation différentielle de propagation de l'onde acoustique pour la grandeur p_1 peut s'écrire : $\Delta p_1 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial(\Delta p_1)}{\partial t} = 0$. Exprimer la grandeur τ en fonction des quantités μ , ρ_0 et v et donner son unité.
38. Indiquer en quoi cette équation différentielle diffère du cas non dissipatif. Indiquer la condition sur μ pour être dans le cas non dissipatif.

39. Faire l'analogie en électrocinétique avec un circuit RLC série, en précisant la transposition des différentes grandeurs mises en jeu.

40. À l'aide des diverses données fournies dans les annexes, évaluer la valeur de τ pour la Terre τ_{Terre} et pour Mars τ_{Mars} . Conclure.

On cherche des solutions harmoniques de l'équation d'onde avec viscosité et pour simplifier, on considèrera des ondes planes progressives harmoniques se propageant suivant les x croissants. On adoptera la forme $\underline{p}_1(x, t) = p_{10} \exp(i(kx - \omega t))$, avec p_{10} un terme d'amplitude, k le vecteur d'onde et ω la pulsation temporelle.

41. Définir la notion de relation de dispersion.

42. L'expliciter ici pour les solutions harmoniques $\underline{p}_1(x, t)$ proposées. Commenter sa forme en l'absence de dissipation.

De récentes mesures *SuperCam* ont mis en évidence des disparités significatives des célérités du son sur Mars allant de 245 à 255 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ suivant que l'on considère de basses ou de hautes fréquences. Cette situation est très différente de celle sur Terre où la célérité est constante sur toute la gamme audible. Ces résultats sont détaillés sur la figure donnée en annexes.

43. Résolution de problème. Proposer une explication à cette observation expérimentale concernant Mars.

3^{ème} partie : de la conception d'un microphone à électret à ses usages sur Mars

Un condensateur comme microphone :

Un microphone est un capteur / transducteur qui permet de convertir une pression acoustique en déformation mécanique puis en signal électrique ; la déformation d'une membrane communique de l'énergie mécanique au système, ensuite convertie en une tension électrique. Le microphone de *SuperCam* repose sur le principe d'un condensateur dont le mouvement d'une des armatures - la membrane - et donc la variation de la distance d entre les deux armatures, entraîne une variation de la capacité. Aucune tension de polarisation de la membrane n'est requise ici comme pour les microphones à condensateur standards, et ceci grâce à l'utilisation d'un électret (*electrostatic magnet*), matériau diélectrique doté d'une charge permanente comme le téflon (fluorocarbonate) ou le mylar (polyester). Un tel microphone à électret est présenté figure 3.

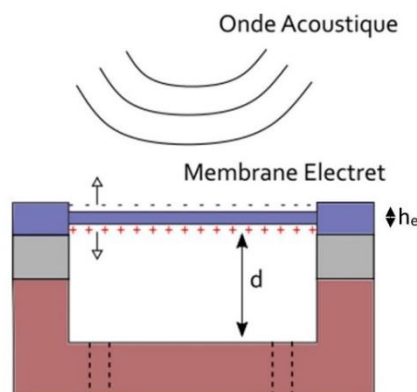


Fig.3 extraite de la thèse de doctorat de B. Chide p.56 (2020)

La déformation de la membrane entraîne une variation de la différence de potentiel de laquelle dérive le champ électrique de polarisation permanent. Il en résulte un très faible courant électrique en sortie du dispositif. Nous nous intéresserons tout d'abord à un condensateur standard tel que celui de la figure 4b.

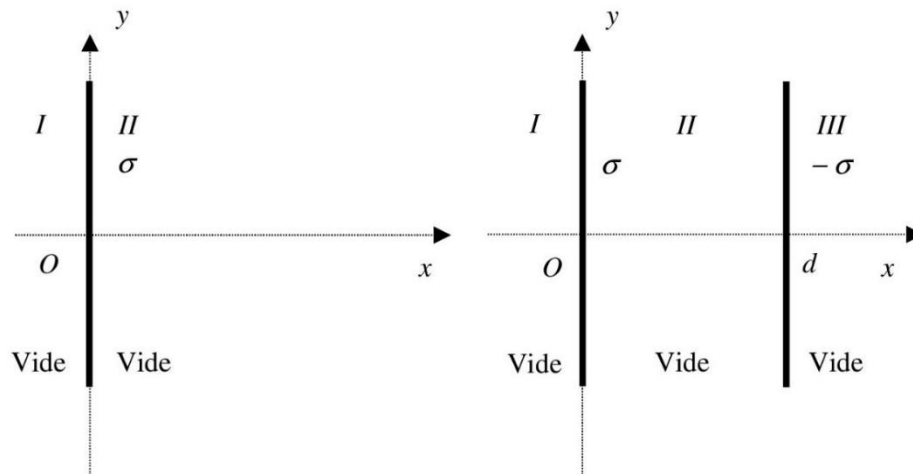


Fig.4a et 4b

Dans un premier temps, considérons uniquement le cadran de gauche de la figure 4a, avec un seul plan infini d'épaisseur nulle et d'aire S , placé verticalement selon Oy au niveau de l'abscisse $x = 0$ d'un axe Ox , porté par le vecteur unitaire \vec{e}_x . Ce plan est chargé positivement, avec une densité surfacique de charge uniforme $+\sigma$. Pour mieux se repérer, il est proposé de noter I le demi-espace où $x < 0$ et II celui où $x > 0$.

44. Rappeler ce que signifie un plan infini mais tout de même doté d'une surface S finie.
45. Expliciter précisément les arguments de symétrie et d'invariance pour trouver l'orientation du champ électrique dans la base proposée ainsi que la dépendance de ce champ en fonction des variables spatiales.
46. Indiquer, en le justifiant, quelle relation existe entre $\vec{E}(x)$ et $\vec{E}(-x)$ pour un point M quelconque de l'axe Ox .
47. En utilisant le théorème de Gauss, montrer que le champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point $M(x, y, z)$ de la région II vaut $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$.

Dans un second temps, sur le cadran de droite figure 4b, rajoutons un second plan infini, parallèle au premier, et placé également sur l'axe Ox . Ce dernier est placé en $x = d$ (avec $d > 0$) ; il est chargé négativement avec une densité surfacique de charge $-\sigma$ de telle sorte que le système constitué des deux plaques soit globalement neutre électriquement. On distingue cette fois-ci trois sous-espaces : I ($x < 0$), II ($0 < x < d$) et III ($x > d$).

48. Déterminer le champ résultant $\vec{E}_{\text{tot}}(M)$ dans les trois domaines d'espace susmentionnés. Tracer l'allure de son module $\|\vec{E}_{\text{tot}}(x)\|$ et commenter qualitativement l'existence d'éventuelles discontinuités.
49. Calculer le potentiel électrostatique en tout point M de l'espace ; on choisira un potentiel nul en $x = 0$.

50. Donner les définitions des lignes de champ et des équipotentielles, puis les tracer dans le cas du condensateur plan ci-dessus.
51. En négligeant les effets de bord, définir la capacité C_d du condensateur plan puis l'exprimer en fonction de la permittivité du vide ϵ_0 , de S et de d .
52. En déduire la capacité par unité de surface C_{ds} .

Revenons à la situation d'un électret de la figure 3 dans laquelle la membrane-électret en bleu est mobile tandis que le fond de la cavité en marron constitue l'autre armature fixe. La distance entre la face intérieure de l'électret et l'armature fixe est $d = 25 \mu\text{m}$ et cet espace vide est de permittivité ϵ_0 . L'électret étant d'épaisseur $h_e = 10 \mu\text{m}$ non nulle, celui-ci est lui-même assimilable à un condensateur plan de capacité C_{he} pour lequel on remplacera la permittivité ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, la permittivité relative ϵ_r valant ici 2.

Le dispositif est initialement débranché et ne génère donc aucun courant ; ceci conduit à l'égalité $U_d = U_{he}$ des tensions aux bornes des condensateurs. La charge totale, qui se décompose en Q_d et Q_{he} , dépend de la densité surfacique de charge σ de l'électret ainsi que de sa surface S . On prendra $\sigma = 2,5 \times 10^{-4} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$ et $S = 10 \text{ cm}^2$.

53. Exprimer Q_{tot} en fonction de σ et S , puis la réexprimer en fonction de la charge Q_d , de la permittivité relative ϵ_r ainsi que des distances d et h_e .
54. En déduire la charge Q_d , la différence de potentiel U_d ainsi que le champ électrostatique permanent E_d qui règne dans la partie évidée, dû à la présence de l'électret, le tout constituant un condensateur à électret.
55. Donner les valeurs numériques de ces trois dernières grandeurs relatives au condensateur à électret, et commenter plus particulièrement celle du champ électrostatique.

Le signal ainsi collecté par le microphone (*Mic*), V_{IN} , est préamplifié par le montage représenté sur la figure 5, montage qui comporte un filtre actif constitué d'un amplificateur linéaire intégré (*ALI*) idéal dont les propriétés utiles à la suite du problème sont fournies en annexe 3, deux résistances R_{IN} et R_{OUT} ainsi qu'un condensateur de capacité C .

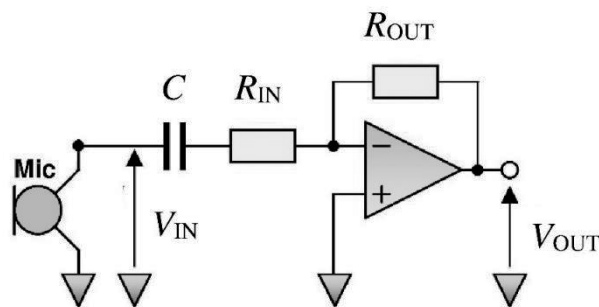


Fig.5

56. Montrer que l'on peut réécrire la fonction de transfert $T(i\omega) = \frac{V_{\text{OUT}}}{V_{\text{IN}}}$ du dispositif sous la

$$\text{forme : } T(i\omega) = K \frac{\frac{i\omega}{\omega_c}}{1 + \frac{i\omega}{\omega_c}}, \text{ avec une constante } K \text{ et une fréquence } \omega_c.$$

57. Donner les expressions littérales de K et ω_c en fonction des paramètres du filtre actif et préciser leurs significations physiques. Qualifier, en la justifiant, la nature du filtre passif équivalent.

La valeur de R_{IN} est fixée à $5 \text{ k}\Omega$. L'amplification souhaitée par ce dispositif est de 60 dB à la fréquence de coupure de 250 Hz. Il faut alors le dimensionner en fixant les valeurs de R_{OUT} et de C .

58. Calculer les valeurs numériques de R_{OUT} et de C pour atteindre les spécifications recherchées.
59. Donner l'allure du diagramme de Bode du gain, en mettant en évidence les asymptotes à basse et à haute fréquence. On utilisera la variable réduite $\frac{\omega}{\omega_c}$ et on y fera apparaître toutes les valeurs numériques remarquables.

Un code Python, fourni en annexe 3, est relatif à une fonction de filtrage.

60. Reproduire sur votre copie la ligne n° 11 du code et la compléter pour le rendre compatible avec la problématique des questions 57 et 58. Préciser l'action de ce code si on l'exécutait.

Le microphone de *Supercam* constitue l'oreille de *Perseverance*. Sa directivité représente sa sensibilité en fonction de la direction de provenance de l'onde acoustique par rapport à l'axe de réponse principal du microphone ; cette propriété est absolument critique dans l'étude de la dynamique atmosphérique, et des vents martiens en particulier. Selon l'usage, il sera omnidirectionnel, cardioïde ou bidirectionnel.

Comme pour le microphone, il faut prendre en compte la directivité de la source sonore. Plutôt que de considérer une unique source sonore ponctuelle, nous ferons l'hypothèse de trois sources équidistantes vibrant en phase, avec une source centrale rayonnant deux fois plus (en amplitude) que les deux autres distantes de b , conformément à la figure 6. On note A l'amplitude des sources en O_1 et O_2 . En outre, nous nous placerons en champ lointain ($kr \gg 1$, avec k module du vecteur d'onde) ainsi que dans la configuration géométrique, $r \gg b$.

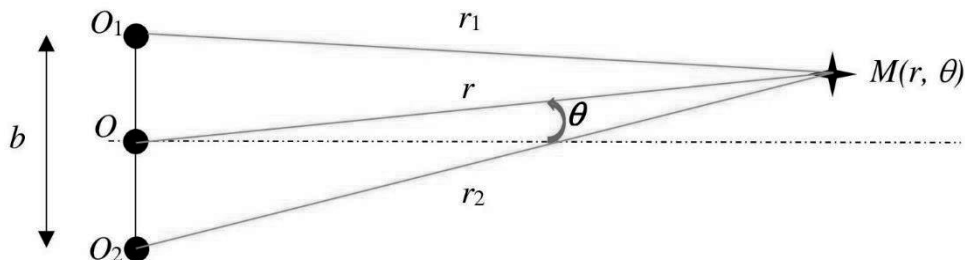


Fig.6

61. L'onde est supposée *sphérique, harmonique* et de pulsation ω . Donner en notation complexe le champ de pression $\underline{p}_0(M, t)$ au point M dû à la source centrale uniquement.
62. Compte tenu des hypothèses, montrer que le champ de pression $\underline{p}_1(M, t)$ dû à la source située en O_1 s'écrit

$$\underline{p}_1(r, t) = \frac{A}{r_1} \exp(i\omega t) \exp(-ikr_1) \approx \frac{A}{r} \exp(i\omega t) \exp\left(-ik\left(r - \frac{b}{2} \sin(\theta)\right)\right).$$

63. Exprimer la quantité équivalente $\underline{p}_2(M, t)$ qui correspond à la source située en O_2 .
64. Exprimer le champ de pression total résultant $\underline{P}_\theta(r, t)$ ainsi que la fonction de directivité définie par $D(\theta) = \left(\frac{\underline{P}_\theta(r, t)}{\underline{P}_{\theta=0}(r, t)}\right)^2$.
65. Pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et dans le cas spécifique où $b = \lambda$, indiquer si la fonction de directivité est isotrope.

La fin de la composition s'attachera à montrer comment une mesure de la célérité du son à la surface de Mars permet d'avoir une information sur le gradient thermique atmosphérique à l'aide d'un modèle simple à gradient constant $T = T_0 - az$ (voir 1^{ère} partie). Avec la valeur du gradient considérée dans les annexes 1, cette célérité v varie typiquement de 12 % sur les 2 premiers mètres. Conformément à la figure 7, nous considérerons une source sonore sur le sol martien qui résulte d'un tir LIBS et dont le son émis arrive au niveau du microphone installé sur le mât à la hauteur $h_{\text{mât}} = 2$ m après un parcours de distance $D = 2,4942$ m.

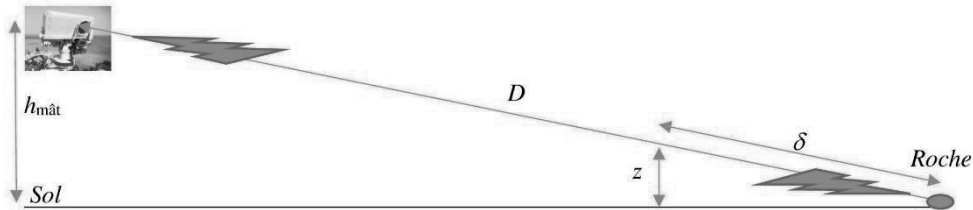


Fig.7

66. Ecrire la relation intégrale qui lie la durée de propagation Δt à la distance élémentaire parcourue $d\delta$ et à la célérité $v(z)$.
67. En considérant le profil de température $T = T_0 - az$ et en utilisant la relation donnant la célérité du son dans un gaz parfait obtenue à la question 33, montrer que Δt peut se mettre sous la forme $\Delta t = \sqrt{\frac{M}{\gamma RT_0}} \frac{2DT_0}{h_{\text{mât}} a} \left(1 - \left(1 - \frac{h_{\text{mât}} a}{T_0} \right)^\beta \right)$, avec une puissance β à déterminer.
68. Après comparaison des quantités $h_{\text{mât}} a$ et T_0 , montrer que dans le cadre de ce modèle à gradient constant, on peut écrire : $a = \frac{4T_0}{h_{\text{mât}}} \left(\frac{v_0 \Delta t}{D} - 1 \right)$, avec v_0 célérité du son au niveau de la surface de Mars, de température T_0 .

Une expérience préliminaire, avec 29 tirs laser séparés de 333 ms chacun, a été effectuée in situ, avec des mesures des durées de propagation et des célérités associées. Le graphe présentant les données est placé en annexe 3.

69. Commenter l'adéquation des données préliminaires avec la valeur de $a = |\vec{\nabla}T|$ du modèle développé.

Annexe 1

<u>Constantes physiques :</u>	Constante gravitationnelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
	Célérité de la lumière	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
	Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
	Charge électrique élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
	Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
	Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
	Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
	Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Unités spécifiques : viscosité dynamique μ d'un fluide, exprimée en Poiseuille (Pl) avec $1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Convention adoptée pour les nombres complexes : $i^2 = -1$

Données pour les planètes telluriques de notre système solaire :

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars
Masse ($\times 10^{23} \text{ kg}$)	3,3	48,7	59,7	6,4
Rayon moyen (km)	2439,7	6051,8	6371,0	3389,5
Champ de pesanteur g_0 ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)	3,70	8,87	9,81	3,71
Champ magnétique moyen de surface (μT)	0,10	0,00	47,00	0,06
Température de surface T_0 (K)	451,00	735,00	286,85	218,15
Gradient de température ($\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$)	-	$8,1 \times 10^{-3}$	$5,7 \times 10^{-3}$	20
Pression moyenne P_0 (Pa)	$< 200 \times 10^{-9}$	93×10^5	101325	636
Masse molaire moyenne M des gaz atmosphériques ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	20,77	43,44	28,97	43,34
Indice adiabatique γ à T_0	-	1,33	1,40	1,34 (val. moy.)
Viscosité dynamique (Pl)			$18,5 \times 10^{-6}$	$28,9 \times 10^{-6}$
Principaux constituants atmosphériques	O_2 (42%) Na (29%) H (22%) He (6%) K (0,5%) Aut. (0,5%)	CO_2 (96,5%) N_2 (3,5%)	N_2 (78,1%) O_2 (20,9%) Ar (0,9%) Aut. (0,1%)	CO_2 (96,0%) Ar (1,9%) N_2 (1,9%) Aut. (0,2%)

Masses molaires moyennes de quelques éléments chimiques :

$C : 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $N : 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $O : 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Annexe 2

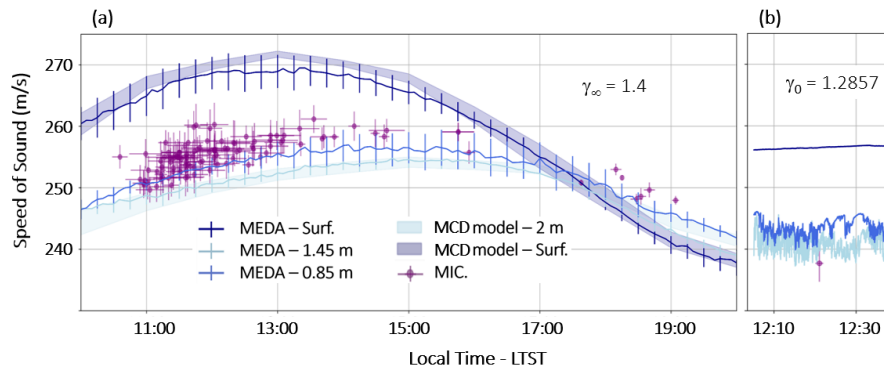
Equations locales de l'acoustique : $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{v}$

$$\text{div} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Formulaire d'analyse vectorielle : $\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} M = \Delta M$; $\text{div} \Delta \vec{M} = \Delta \text{div} \vec{M}$

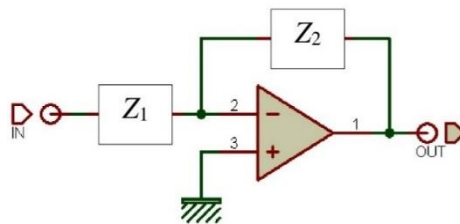
Développement limité utile ($x \ll 1$) : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + O(x^3)$

Célérité du son sur Mars (adapté de S. Maurice *et al*) : (a) célérité du son en fonction de l'heure locale en violet pour les hautes fréquences (> 240 Hz) - données de temps de vol LIBS (Laser Induced Breakdown Spectroscopy) et étiquetées MIC. Les autres célérités sont calculées à 3 hauteurs à partir des données en températures MEDA (Mars Environmental Dynamics Analyser) ; pour toutes ces conversions, l'indice adiabatique vaut γ_∞ . (b) les célérités sont calculées selon les mêmes codes couleurs mais avec un indice adiabatique γ_0 applicable aux basses fréquences (< 240 Hz). La célérité du son estimée à partir de l'effet Doppler Ingenuity est en violet.



Annexe 3

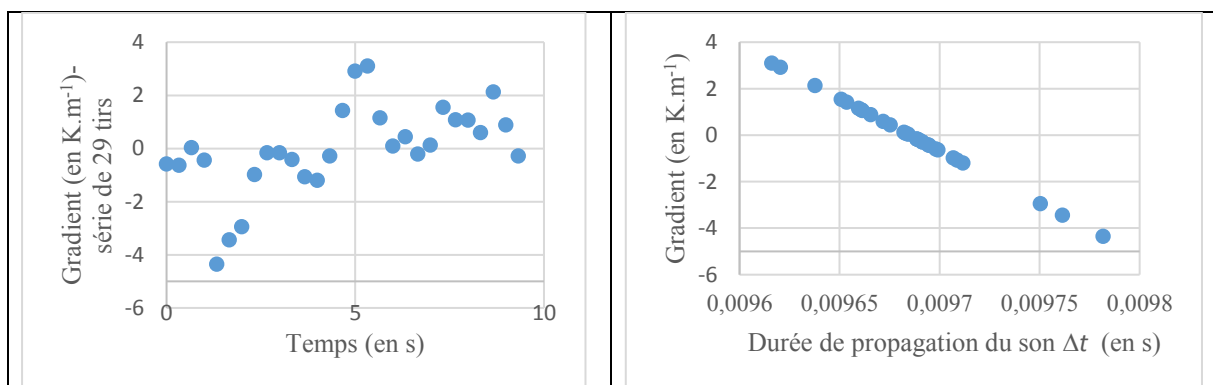
Amplificateur opérationnel (ALI) non idéal (gain d'amplification A) monté en amplificateur inverseur



On peut montrer que la fonction de transfert d'un tel dispositif peut se mettre sous la forme :

$$T(j\omega) = \frac{V_{OUT}(j\omega)}{V_{IN}(j\omega)} = \frac{Z_2}{-\frac{(Z_1+Z_2)}{A} - Z_1}. \text{ Dans le cas d'un ALI idéal, le paramètre } A \text{ tend vers l'infini.}$$

Gradient de température $a = |\vec{\nabla}T|$ (S. Maurice *et al* ; communication privée) : (a) cadran de gauche ; le premier des 29 tirs laser est déclenché à $t = 0$, le dernier s'interrompt à 9,333 s et le gradient (en ordonnée) est mesuré pour chaque tir. (b) cadran de droite : les mêmes 29 tirs sont classés par Δt croissant (en abscisse).



Code Python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from math import pi
4
5 def VIN(t):
6     return np.cos(2*pi*f * t)
7
8 K = -1.4125E3
9 fc = 250 # (Hz)
10 def T(f):
11     return K * # À COMPLÉTER
12
13 def phase(f):
14     return np.angle(T(f))
15
16 def gain(f):
17     return np.abs(T(f))
18
19 def VOUT(t, f):
20     return gain(f) * np.cos(2*pi*f * t + phase(f))
21
22 f = fc / 100
23
24 t0 = 0 # (s)
25 tmax = 1 / f
26 t = np.linspace(t0, tmax, 100)
27
28 plt.plot(t, VOUT(t, f), 'b', label = "VOUT(t) pour f/fc =
    0,01")
29 plt.plot(t, VIN(t), 'r', label = "VIN(t)")
30 plt.legend()
31 plt.title("Effet du préamplificateur")
32 plt.xlabel("Date t (s)")
33 plt.ylabel("Tensions (V)")
34 plt.grid(True)
35 plt.show()
```